ESERCIZI DI ANALISI MATEMATICA 1 – SETTIMANA 17

(1) Esercizio sulla definizione di limite. Dimostrate, utilizzando esplicitamente la definizione di limite, che

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

per le seguenti funzioni $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

$$f(x,y) := x \qquad f(x,y) := x+y \qquad f(x,y) := xy.$$

(2) Siano $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ due funzioni continue. Utilizzando la definizione di limite dimostrate che $h := g \circ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è una funzione continua.
Osservate quindi che funzioni del tipo (per esempio)

$$h(x,y) := \sin(xy), \qquad h(x,y) := e^{\cos(2x+3y)}, \qquad h(x,y) := \sqrt{1+\sin(x^2+y^2)}$$

...e via complicando, sono funzioni continue su $\mathbb{R}^2$.

(3) Determinate, e disegnate sul piano $\mathbb{R}^2$, l'insieme dei punti (x,y) per i quali le seguenti espressioni algebriche sono ben definite *come numeri reali*.

$$\frac{\log(x\sqrt{y-x})}{xy-1}, \qquad \frac{1+\sqrt{y(\sin x - 1)}}{\sqrt{y-x(x-10)}}$$

N.B. Qualche volta, con abuso di linguaggio, esercizi di questo tipo sono presentati come: trovate il dominio di definizione della funzione $f(x,y) := \frac{\log(x\sqrt{y-x})}{xy-1}$.

(4) Analogamente alla definizione data per le successioni, diciamo che $\lambda \in \mathbb{R}^*$ è un *valore limite* per $f : X \to \mathbb{R}$ per $x \to x_0$ se esiste una successione $(x_n)_n \subset X \setminus \{x_0\}$ tale che

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x_0 \quad \text{e} \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lambda,$$

e si dice *classe limite* di f per $x \to x_0$ l'insieme di tali valori limite.
Determinate la classe limite per $x \to +\infty$ di

$$f(x) := \frac{x}{1+x}\sin x.$$

(5) *(Difficile)* Determinate la classe limite per $x \to +\infty$ di

$$f(x) := \frac{\log x}{\log(1+|x\sin x|)}.$$

(6) Supponete che $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell > 0$ e che g sia una funzione qualsiasi. Dimostrate che

$$\limsup_{x\to x_0} f(x)g(x) = \ell \limsup_{x\to x_0} g(x).$$

Perché è stata messa l'ipotesi $\ell > 0$?

(7) Dimostrate che $C \subset \mathbb{R}^n$ è un sottoinsieme chiuso se e solo se vale la seguente condizione:

$$\text{per ogni successione } (\mathbf{x}_n)_n \subset C, \quad \lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{y} \implies \mathbf{y} \in C.$$

(Suggerimento)

(a) Per assurdo. Se C è chiuso e $\mathbf{y} \notin C$ allora esiste $B(\mathbf{y}, \delta)$ contenuto nel complementare di C e quindi ...
(b) Se vale la condizione dimostra che ogni punto di accumulazione di C è contenuto in C.

(8) Disegnate approssimativamente nello spazio $\mathbb{R}^3$ i *grafici* delle seguenti funzioni $f : E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Ricordate che il grafico di $f : E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è l'insieme $\{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in E\}$.

(a) $f(x, y) := 1 - x - y, \qquad E = \mathbb{R}^2;$
(b) $f(x, y) := x + 2y, \qquad E = \{(x, y) : 0 < x < 1, 0 < y < 2\};$
(c) $f(x, y) := Ax + By$, $\;A, B$ reali assegnati, $\qquad E = \mathbb{R}^2;$
(d) $f(x, y) := x^2 + y^2, \qquad E = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 4\};$
(e) $f(x, y) := 1 - x^2 - y^2, \qquad E = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1, x > 0, y > 0\};$
(f) $f(x, y) := 1 - y^2, \qquad E = \{(x, y) : -1 < y < 1\};$
(g) $f(x, y) := x^2 - y^2, \qquad E = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\};$
(h) $f(x, y) := xy, \qquad E = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\};$
(i) $f(x, y) := \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad E = \mathbb{R}^2;$
(j) $f(x, y) := 1 - \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad E = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1, x > 0\}.$

(9) Sia $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}$ la funzione definita nel seguente modo

$$f(x, y) := \frac{y^2}{\sqrt{x^4 + y^4}}.$$

E' possibile definire f anche nel punto $(0, 0)$ in modo che la nuova funzione f, il cui dominio ora è tutto $\mathbb{R}^2$, sia continua in $(0, 0)$?

(10) Sia $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}$ la funzione definita nel seguente modo

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{x^2+y^2}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Verificate che f non è continua lungo l'asse delle ordinate.
(Difficile) Determinate un insieme chiuso $C \subset \mathbb{R}^2$ tale che $(0, 0) \in C$ e inoltre $f : C \to \mathbb{R}$ sia continua.