ESERCIZI DI ANALISI MATEMATICA 1 – SETTIMANA 18

(1) *Esercizi 6 e 7 pag 210:*
$f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice *lipschitziana* in E se esiste un numero $L > 0$ tale che, per ogni $x, y \in E$:
$$|f(x) - f(y)| \leq L\,|x - y|.$$
$f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice *hölderiana di ordine* α in E se esistono $\alpha \in (0, 1]$ e $L > 0$ tali che per ogni $x, y \in E$:
$$|f(x) - f(y)| \leq L\,|x - y|^{\alpha}.$$

- Dite se le seguenti funzioni sono hölderiane
$$\sqrt{x} \text{ in } (0,1); \qquad\qquad x^2 \text{ in } \mathbb{R}$$
- Dimostrate che una funzione lipshitziana in E è uniformemente continua in E.
- Dimostrate che una funzione hölderiana in E è uniformemente continua in E.

(2) *Esercizi 8 e 9 pag 210:* Dimostrate che:
- se $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ è continua ed ha un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$ allora è uniformemente continua in $[1, +\infty)$;
- se $g : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ è continua ed ha un asintoto obliquo per $x \to +\infty$ allora g è uniformemente continua in $[1, +\infty)$;

(3) Trovate e disegnate approssimativamente sul piano i domini naturali delle funzioni
  (a) $f(x, y) := \sqrt{|x|(x^2 - (y + 1)^2)}$
  (b) $g(x, y) := \sqrt{y \cos(x^2 + y^2)}$

(4) Calcolate le derivate parziali prime, il gradiente e le derivate parziali seconde (dove esistono) delle funzioni
  (a) $f(x, y) := ax + by$;
  (b) $f(\mathbf{x}) := \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle$ dove $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ e $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$;
  (c) $f(x, y) := ax^2 + 2bxy + cy^2 = (x, y) \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$;
  (d) $f(\mathbf{x}) := \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ dove $\mathbf{x}^T = (x_1, \ldots, x_n)$ e $A := \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$
  (e) $r(x, y) := \sqrt{x^2 + y^2}$; $\qquad u(x, y) := \dfrac{1}{x^2 + y^2}$;
  (f) $r(x, y, z) := \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$;
  (g) $v(x, y, z) := (x^2 + y^2 + z^2)^{\alpha}$ dove $\alpha \in \mathbb{R}$
  (h) $f(x, y) := 2^{x^2 + xy + y^2}$;
  (i) $f(x, y, z) := \sinh(ax + by^2 + cz^3)$;
  (j) $f(x, y) := \displaystyle\int_0^{x^2 + y^2} \frac{\sin t}{1 + t^2}\, dt$;