ESERCIZI DI ANALISI MATEMATICA 1 – SETTIMANA 19

(1) Scrivete l'equazione del piano tangente al grafico della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) := x^2 + y^2$$

nel punto di coordinate $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Utilizzate quanto ottenuto per calcolare

(a) in quali punti il piano tangente è ortogonale al vettore $\mathbf{v} = (1,1,1)$.

(b) in quali punti il piano tangente è parallelo alla retta $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 3x + 2y + z = 0. \end{cases}$

(2) Trovate le equazioni del piano tangente al grafico delle seguenti funzioni (nel loro naturale dominio di definizione)

(a) $f(x,y) := \sqrt{1 + x^2 + y^2}$ (iperboloide di rotazione).

(b) $f(x,y) := \sqrt{1 - 2x^2 - 4y^2}$ (ellissoide).

(3) Dite se sono differenziabili le seguenti funzioni

(a) $f(x,y) := \dfrac{xy}{1 + x^2y^2}$ in $\mathbb{R}^2$.

(b) $f(x,y) := x^{3/2} + (xy)^{3/2}$ all'interno del suo naturale dominio di definizione.

(c) $f(x,y) := \begin{cases} \frac{x^2y^3}{x^4+y^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ in $\mathbb{R}^2$.

(4) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) := 4x^4 + xy^2$$

(a) Scrivete l'equazione della retta perpendicolare al grafico di f nel punto di coordinate $(1, 2, f(1,2))$.

(b) Calcolate $\max_{\|\mathbf{v}\|=1} D_{\mathbf{v}} f(1,3)$.

(c) Visto che il più è fatto, calcolate anche $\min_{\|\mathbf{v}\|=1} D_{\mathbf{v}} f(1,3)$ e $\min_{\|\mathbf{v}\|=1} |D_{\mathbf{v}} f(1,3)|$.

(5) Verificate che il piano di equazione $z = 0$ **non** è il piano tangente nell'origine della funzione

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(6) *(Esercizio 1 pag 335):* Studiate, in funzione del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, l'esistenza delle derivate parziali e la differenziabilità nell'origine della funzione

$$f(x,y,z) := \begin{cases} z^4 \dfrac{(x^2+y^2)^\alpha}{x^2+y^2+z^2}, & (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$$

(7) *(Esercizio 2 pag 335):* Si indica con Δ l'operatore differenziale (di Laplace) definito da

$$\Delta f(\mathbf{x}) := \sum_{h=1}^{n} D^2_{x_h,x_h} f(\mathbf{x}).$$

(a) se $n = 2$ e $r(x, y) := \sqrt{x^2 + y^2}$ calcolate per (x, y) tali che $0 < x^2 + y^2$,

$$\Delta r, \qquad \Delta(r^2), \qquad \Delta\left(\frac{1}{r}\right).$$

(b) nel caso generale $n \geq 2$ e $r(\mathbf{x}) := \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ calcolate, per $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$,

$$\Delta r, \qquad \Delta(r^2), \qquad \Delta\left(\frac{1}{r}\right).$$

(8) Calcolate e disegnate approssimativamente sul piano gli insiemi di livello delle funzioni

(a) $f(x, y) := \dfrac{xy - y^2}{2x^2 + y^2}$

(b) $g(x, y) := (x^2 + y^2) \log(1 + x^2 + y^2)$

(9) *(Esercizio 19, pag 337):* Sia $\mathbf{M} = (m_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ una matrice quadrata di ordine n; allora la funzione

$$\det : \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}$$
$$\mathbf{M} := (m_{ij})_{i,j=1,\ldots,n} \mapsto \det \mathbf{M}$$

è una funzione di classe C^∞. Verificate che

$$\frac{\partial}{\partial m_{ij}} \det \mathbf{M} = M_{ij},$$

dove M_{ij} è il complemento algebrico dell'elemento m_{ij}.

(10) Sia $f(x, y, z) := \log \dfrac{xy}{z}$.

(a) Trovate il dominio naturale di f.

(b) Calcolate il gradiente $\nabla f(3, 2, 2)$.

(c) Scrivete l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(3, 2, 2, f(3, 2, 2))$.

(11) Calcolate le derivate seconde di $f(x, y) := xe^{xy}$.

(12) Sia data la funzione $f(x, y) := x^y - 2y + 2x$.

(a) Trovate il dominio naturale della funzione;

(b) trovate per quale $\mathbf{v} := (\cos\alpha, \sin\alpha)$ vale $D_{\mathbf{v}} f(1, 1) = 2$;

(c) trovate per quale $\mathbf{v} := (\cos\alpha, \sin\alpha)$ la derivata $D_{\mathbf{v}} f(1, 1)$ è massima e quale è il valore del massimo.

(13) *(Difficile) Esercizio 13 pag 336*: Trovate il maggior numero di funzioni $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenziabili in $\mathbb{R}^2$ e tali che

(a) $D_x f(x, y) = 0$;

(b) $D_x f(x, y) + D_y f(x, y) = 0$;

(c) $2D_x f(x, y) + 3D_y f(x, y) = 0$.