ANALISI MATEMATICA A – ANALISI MATEMATICA 1
ESERCIZI DELLA SETTIMANA 2

Il principio di induzione

(1) Verificate le seguenti identità:

$$\sum_{k=1}^{m} a_k - \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{k=n+1}^{m} a_k, \qquad \text{se } n < m$$

$$\sum_{k=1}^{n}(k+1) + \sum_{i=1}^{n}(1-i) = 2n;$$

$$\left(\sum_i a_i + \sum_i b_i\right)\left(\sum_i a_i - \sum_i b_i\right) = \sum_{i,j}(a_i a_j - b_i b_j).$$

(2) Dimostrate per induzione le seguenti uguaglianze:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1);$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2;$$

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2.$$

(3) Dimostrate che per ogni $x > 0$ è vero che $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

(4) Dimostrate: se $n > 1$ è un intero e $x > 1$ allora

$$0 < \sqrt[n]{x} - 1 < \frac{x-1}{n}.$$

(5) (*Difficile*) Supponete che n sia un numero naturale maggiore o uguale a 2 e supponete che $x_1, x_2, \ldots, x_n$ siano numeri reali positivi. Dimostrate, per induzione su n, che la seguente implicazione è vera:

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n = 1 \implies x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq n$$

(*Esempi:* $2 \cdot \frac{1}{2} = 1$ *e* $2 + \frac{1}{2} \geq 2$*; oppure* $2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} = 1$ *e* $2 + \frac{1}{3} + \frac{3}{2} \geq 3$.)

Ancora su disequazioni e sottoinsiemi di $\mathbb{R}$

(1) Dimostrate che $\log_{10} 3$ non è un numero razionale.
(2) Determinate gli insiemi seguenti, eventualmente in funzione del parametro:

(a)

$$A_c := \left\{x : \sqrt{\frac{x}{x^2+c}} < 1\right\}, \qquad c \in \mathbb{R}$$

(b)

$$B := \left\{x : \sqrt{\frac{2}{x} + |1+x|} < 1\right\}$$

(c) Le funzioni coseno iperbolico e seno iperbolico sono definite nel seguente modo

$$\cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$
$$\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2};$$

determinate gli insiemi

$$C := \{x : \cosh(x) < 3\}, \qquad D := \{x : \sinh(x) > 1\}$$

(3) Supponete che a, b, c, d siano numeri reali positivi. Dimostrate che

$$\min\left\{\frac{a}{c}, \frac{b}{d}\right\} \leq \frac{a+b}{c+d} \leq \max\left\{\frac{a}{c}, \frac{b}{d}\right\}$$

(4) Usate la disuguaglianza $(1+x)^n \geq 1 + nx$, valida per $x > -1$ e per $n \in \mathbb{N}$, per dimostrare che

$$a \leq \left(1 + \frac{a-1}{n}\right)^n \qquad \text{per ogni } a > 1 \text{ e per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

(5) Se x e y sono numeri reali positivi, definiamo

- la media aritmetica di x e y come $m_a(x,y) := \dfrac{x+y}{2}$
- la media geometrica di x e y come $m_g(x,y) := \sqrt{xy}$
- la media armonica di x e y come $m_h(x,y) := 2\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right)^{-1}$.

Dimostrate che

$$m_h(x,y) \leq m_g(x,y) \leq m_a(x,y) \qquad \text{per tutti gli } x, y > 0.$$

(6) *(Difficile)* La disuguaglianza analoga alla precedente vale anche per $n > 2$ numeri positivi. Se $x_1, \ldots, x_n$ sono reali positivi allora

$$n\left(\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right)^{-1} \leq \sqrt[n]{x_1 \ldots x_n} \leq \left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right)$$

(Suggerimento) Potete provare a dimostrarlo per induzione o, alternativamente, utilizzando la disuguaglianza vista negli esercizi della settimana 1:
se $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sono numeri positivi allora

$$a_1 \ldots a_n = 1 \implies a_1 + \cdots + a_n \geq n.$$

Massimo, minimo, estremo superiore ed estremo inferiore

(1) Sia $A := \left\{\dfrac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N}\right\}$. Dimostrate, *facendo uso della definizione*, che

$$\sup A = 1, \qquad \inf A = \min A = 0.$$

(2) Determinate estremo superiore ed estremo inferiore dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$:
   (a) $\{0\}$; $\quad \left\{\dfrac{n-1}{n+1} : n \in \mathbb{N}\right\}$
   (b) $\{x : x|x| < x^2\} \cup [-1, 1)$
   (c) $\{x : 2 \leq x^2 < 4\}$

(3) Determinate estremo superiore ed estremo inferiore dei seguenti insiemi; in ogni caso stabilite se l'estremo superiore è un massimo e se l'estremo inferiore è un minimo:
   (a) $A := \{n : n \in \mathbb{N}\} \cup \left\{\dfrac{1}{n^2} : n \in \mathbb{N}\right\}$
   (b) $B := \left\{\dfrac{n}{m} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 0 < m < n\right\}$
   (c) $C := \left\{x \in \mathbb{R} : 0 < x \leq 2 \wedge x = 3 - \dfrac{1}{n} \text{ per } n \in \mathbb{N}_+\right\}$
   (d) $D := \left\{x \in \mathbb{R} : x = 3 - \dfrac{1}{n} \text{ per } n \in \mathbb{Z} \text{ e } n \neq 0\right\}$
   (e) $E := \{xy : x \in \mathbb{R}, -1 \leq x \leq 2 \wedge y \in \mathbb{R}, -3 \leq y < -1\}$

(4) Se f è una funzione definita su un sottoinsieme $A \subset \mathbb{R}$ a valori in $\mathbb{R}$, allora, il massimo e il minimo, l'estremo superiore e l'estremo inferiore di f in A si definiscono come, rispettivamente, il massimo e il minimo, l'estremo superiore e l'estremo inferiore dell'insieme immagine $f(A)$.
   Determinate $\sup_A f$, $\inf_A f$ e, se esistono, $\max_A f$, $\min_A f$ delle seguenti funzioni (nei vari casi A è il naturale dominio di definizione della funzione)
   (a) $\sin x, \quad \tan x, \quad \log x, \quad \arctan x;$
   (b) $x^2, \quad \arctan(x^2), \quad \log(x^2+1), \quad 2^x, \quad 2^{\sin x}.$

(5) *(Difficile)* Sia X un insieme *non vuoto* di numeri *non negativi* con le seguenti proprietà:
   - $s := \sup X < 1$
   - se $x, y \in X$ e $x < y$ allora $\dfrac{x}{y} \in X$.

   (a) Dimostrate che $s = \max X$.
   (b) Fate un esempio di un insieme X che abbia le proprietà indicate.