ESERCIZI DI ANALISI MATEMATICA 1 – SETTIMANA 20

0.1. **Punti stazionari. Formula di Taylor.**

(1) Trovate i *punti stazionari* delle funzioni seguenti (nel loro naturale dominio di definizione) e dite se si tratta di punti di massimo o minimo relativo.
  (a) $f(x,y) := x^3 + 3x^2 + 4xy + y^2$;
  (b) $f(x,y) := y^2 - x^2 y$;
  (c) $f(x,y) := x^4 - x^3 + y^2$;
  (d) $f(x,y) := x^4 + ax^2 y + y^2$, in funzione del parametro reale a;
  (e) $f(x,y,z) := x^2 + y^2 + z^3 - 2x - 3z$;

(2) Scrivete la formula di Taylor, con centro in $(0,0)$ e fino al secondo ordine, delle funzioni
  (a) $f(x,y) := x\cos(x+y)$;
  (b) $g(x,y,z) := \sin(2x + y - z)$.

(3) Si indica con Δ l'operatore differenziale (detto operatore di Laplace) definito da

$$\Delta f(\mathbf{x}) := \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_h^2}(\mathbf{x}).$$

$f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ si dice si dice *armonica* in un aperto A se $\Delta f(\mathbf{x}) = 0$ per ogni $\mathbf{x} \in A$. Verificate che le seguenti funzioni sono *armoniche* sul loro dominio di definizione
  (a) $f(x,y) := \arctan \dfrac{x+y}{x-y}$;
  (b) $g(x,y) := \log(x^2 + y^2)$.

0.2. **Controesempi.**

(1) Verificate che nel punto $(0,0)$ la funzione

$$f(x,y) := \begin{cases} \sqrt[3]{y}\, e^{-\frac{y^2}{x^4}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

  (a) è continua;
  (b) è derivabile lungo ogni direzione;
  (c) vale la formula $D_{\mathbf{v}} f(0,0) = \langle \nabla f(0,0), \mathbf{v} \rangle$ per ogni $\mathbf{v}$;
  (d) f non è differenziabile in $(0,0)$.

(2) *Esempio (Peano 1884):* Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) := \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{se } x^2 + y^2 > 0 \\ 0 & \text{se } x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

Verificate che le derivate parziali seconde miste di f esistono in $(0,0)$, ma

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0).$$

Suggerimento:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,y)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \dots \qquad \text{per } y \neq 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = \lim_{y\to 0} x\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \dots \qquad \text{per } x \neq 0$$

(3) Dimostrate che non esiste nessuna funzione di classe C^2 in $\mathbb{R}^2$ tale che

$$D_x f(x,y) = x\sin y, \qquad D_y f(x,y) = y\cos x.$$