ESERCIZI DI ANALISI MATEMATICA 1
SETTIMANA 21

0.1. **Curve in $\mathbb{R}^2$ e in $\mathbb{R}^3$.**

(1) Interpretate geometricamente (disegnate) il supporto (l'immagine) delle seguenti curve. *(Aiutatevi, se il caso, con un programma che disegna grafici. Poi cercate di interpretare quello che avete ottenuto.)*

(a) $\mathbf{r} : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$ definita da $\mathbf{r}(t) := (x_0 + 2\cos t)\mathbf{i} + (y_0 + 3\sin t)\mathbf{j}$;
(b) $\mathbf{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definita da $\mathbf{r}(t) := t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$;
(c) $\mathbf{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definita da $\mathbf{r}(t) := t^2\mathbf{i} + t^3\mathbf{j}$;
(d) $\mathbf{r} : [0, +\infty) \to \mathbb{R}^3$ definita da $\mathbf{r}(t) := \cos t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j} + 2t\,\mathbf{k}$;
(e) $\mathbf{r} : [0, +\infty) \to \mathbb{R}^3$ definita da $\mathbf{r}(t) := (t\cos t)\mathbf{i} + (t\sin t)\mathbf{j} + (2t)\mathbf{k}$.

(2) Interpretate geometricamente (disegnate) il supporto (l'immagine) delle seguenti funzioni. *(Aiutatevi, se il caso, con un programma che disegna grafici. Poi cercate di interpretare quello che avete ottenuto.)*

(a) $\mathbf{s} : [0, 2] \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$ definita da $\mathbf{s}(t, \theta) := (\cos\theta)\mathbf{e}_1 + t\,\mathbf{e}_2 + (\sin\theta)\mathbf{e}_3$;
(b) $\mathbf{s} : [-2, 2] \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$ definita da $\mathbf{s}(t, \theta) := (|t|\cos\theta, |t|\sin\theta, t)$;
(c) $\mathbf{s} : [0, 2\pi) \times [0, \pi/2] \to \mathbb{R}^3$ definita da $(\theta, \phi) \mapsto (\cos\theta\cos\phi, \sin\theta\cos\phi, \sin\phi)$; *(sono coordinate sferiche)*;
(d) $\mathbf{s} : [0, \pi) \times [0, \pi/2] \to \mathbb{R}^3$ definita da $(\theta, \phi) \mapsto (\cos\theta\cos\phi, \sin\theta\cos\phi, 2\sin\phi)$; *(variante del precedente.)*

0.2. **Massimi e minimi.**

(1) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definita da

$$f(x, y) = x^2y + 2y^2 - 4xy.$$

(a) Trovate i punti stazionari di f nel piano e dite se sono massimi, minimi o selle.
(b) Trovate massimo e minimo assoluto di f in $T = \{(x, y) : -5 \le x \le 0,\ 0 \le y \le 2\}$.

(2) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) := (y - x^2)(4y^2 - x).$$

(a) Studiate il segno di f e disegnate le regioni dove f è positiva, nulla o negativa.
(b) Trovate i punti stazionari di f in $\mathbb{R}^2$ e studiatene la natura.
(c) Trovate i punti di massimo e di minimo assoluto di f in $R := \{(x, y) : 0 \le x \le 4, 0 \le y \le 1\}$

(3) Trovate i punti di massimo e minimo assoluto di

$$f(x, y) := (x + y - 2)^2$$

nel cerchio $C = \{(x, y) : x^2 + y^2 \le 4\}$.

(4) Trovate i punti ed i valori di massimo e minimo assoluto della funzione

$$f(x,y) := 2xy(2-x-y)$$

nell'insieme $A = \{(x,y) : x \geq 0, y \geq 0, 2x+y \leq 4\}$.

(5) Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y,z) := 3x^2 + \log(2+y^2)\log(2+z^2).$$

(a) Trovate i punti stazionari di f in $\mathbb{R}^3$ e classificateli.
(b) Dite se f ha massimo o minimo assoluto in $\mathbb{R}^3$.

(6) Sia Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) := (x^2+y^2)^2 + xy.$$

(a) Trovate i punti stazionari di f nel piano e studiatene la natura.
(b) Trovate i punti di massimo e minimo assoluto di f nel cerchio $C = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 1\}$.

(7) Sia Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) := 25x^3 - 5x^2y - 5xy + y^2.$$

Determinate punti stazionari, massimo e minimo assoluto di f nella regione $S = \{(x,y) : 5x^2 \leq y \leq 5\}$.