ESERCIZI DI ANALISI MATEMATICA 1 – SETTIMANA 22

0.1. **Curve in $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$. Determinanti Jacobiani.**

(1) Interpretate geometricamente (disegnate) il supporto delle seguenti curve

  (a) $\mathbf{r} : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$ definita da $\mathbf{r}(t) := (x_0 + 2\cos t)\mathbf{i} + (y_0 + 3\sin t)\mathbf{j}$;
  (b) $\mathbf{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definita da $\mathbf{r}(t) := t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$;
  (c) $\mathbf{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definita da $\mathbf{r}(t) := t^2\mathbf{i} + t^3\mathbf{j}$;
  (d) $\mathbf{r} : [0, +\infty) \to \mathbb{R}^3$ definita da $\mathbf{r}(t) := \cos t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j} + 2t\,\mathbf{k}$;
  (e) $\mathbf{r} : [0, +\infty) \to \mathbb{R}^3$ definita da $\mathbf{r}(t) := (t\cos t)\mathbf{i} + (t\sin t)\mathbf{j} + (2t)\mathbf{k}$.

(2) Interpretate geometricamente (disegnate) l'immagine delle seguenti funzioni.

  (a) $\mathbf{s} : [0, 2] \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$ definita da $\mathbf{s}(t, \theta) := (\cos\theta)\mathbf{e}_1 + t\,\mathbf{e}_2 + (\sin\theta)\mathbf{e}_3$;
  (b) $\mathbf{s} : [-2, 2] \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$ definita da $\mathbf{s}(t, \theta) := (|t|\cos\theta, |t|\sin\theta, t)$;
  (c) $\mathbf{s} : [0, 2\pi) \times [0, \pi/2] \to \mathbb{R}^3$ definita da $(\theta, \phi) \mapsto (\cos\theta\cos\phi, \sin\theta\cos\phi, \sin\phi)$;
  (d) $\mathbf{s} : [0, \pi) \times [0, \pi/2] \to \mathbb{R}^3$ definita da $(\theta, \phi) \mapsto (\cos\theta\cos\phi, \sin\theta\cos\phi, 2\sin\phi)$.

(3) Calcolate la matrice Jacobiana delle funzioni

  (a) $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da
$$\mathbf{f}(x, y) := (ye^{x^2})\mathbf{e}_1 + \sin(x + y)\mathbf{e}_2;$$
  (b) $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definita da
$$\mathbf{f}(x, y, z) := (z^2 + 1)x\mathbf{e}_1 + xyz\mathbf{e}_2 + e^{x+yz}\mathbf{e}_3 + \cos(x + y + z)\mathbf{e}_4.$$

(4) Calcolate $\mathbf{r}'(t)$, $\mathbf{r}''(t)$, $\|\mathbf{r}'(t)\|$, $\|\mathbf{r}''(t)\|$ delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}^3$ definite da:

  (a) $\mathbf{r}(t) := t^3\mathbf{i} - \sqrt{6}t^2\mathbf{j} + 4t\mathbf{k}$;
  (b) $\mathbf{r}(t) := t\mathbf{i} + 2\sin t\mathbf{j} + 2(1 - \cos t)\mathbf{k}$;

  Date un'interpretazione fisica dei risultati ottenuti.

0.2. **Ancora su massimi e minimi.**

(1) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da
$$f(x, y) := xy^2 - xy^3 - x^2y^2.$$
  (a) Studiate il segno di f in $\mathbb{R}^2$.
  (b) Trovate e studiate i punti stazionari di f in $\mathbb{R}^2$.
  (c) Trovate massimo e minimo assoluto di f nel triangolo di vertici $P_1 = (1, 0)$, $P_2 = (0, 0)$, $P_3 = (0, 1)$.

(2) Trovate massimo e minimo assoluto, se esistono, della funzione
$$f(x, y) := e^{-x^2}(-x + y)$$
nella striscia $S = \{(x, y) : |y| \leq 2\}$.

(3) Trovate massimo e minimo assoluto della funzione

$$f(x, y) := e^{-x}\, x\, y^2$$

nel quadrato $S = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2,\ -1 \leq y \leq 1\}$.

(4) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) := xy(x + y - 1)e^{-x}$$

(a) Studiate il segno di f nel semipiano $S = \{(x, y) : x \geq 0\}$.
(b) Trovate, se esistono, i punti di massimo e minimo, relativo ed assoluto, di f in S.