

ESERCIZI DI ANALISI MATEMATICA 1 – SETTIMANA 23

0.1. Derivazione di funzioni composte.

- (1) Siano $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione due volte derivabile e $c > 0$ una costante. Verificate che sia la funzione

$$u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{definita da:} \quad u(t, x) := f(x + ct)$$

che la funzione

$$u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{definita da:} \quad u(t, x) := f(x - ct)$$

sono soluzioni in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dell'equazione delle onde

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x)$$

- (2) Se la curva $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ è "data in coordinate polari", cioè sono assegnate le funzioni

$$r : I \rightarrow \mathbb{R} \quad \theta : I \rightarrow \mathbb{R},$$

calcolate la retta tangente a γ nei punti del suo sostegno.

- $r, \theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $r(t) := e^t$ $\theta(t) := t$.
- Calcolate la retta tangente al supporto della spirale di equazione

$$r(\theta) = \theta, \quad \theta \in [0, +\infty)$$

nei punti di intersezione con la retta $x = 0$.

- (3) Sia data $f : [0, +\infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ in "coordinate polari"

$$(r, \theta) \mapsto f(r, \theta).$$

- (*Difficile*) Verificate che, se f è differenziabile,

$$\nabla f|_{(r,\theta)} = \left(\cos \theta \partial_r f|_{(r,\theta)} - \frac{\sin \theta}{r} \partial_r f|_{(r,\theta)} \right) \mathbf{e}_1 + \left(\sin \theta \partial_r f|_{(r,\theta)} + \frac{\cos \theta}{r} \partial_\theta f|_{(r,\theta)} \right) \mathbf{e}_2$$

- (*Difficile*) Verificate che, se f è di classe C^2 ,

$$\Delta f|_{(r,\theta)} = \partial_{rr}^2 f|_{(r,\theta)} + \frac{1}{r} \partial_r f|_{(r,\theta)} + \frac{1}{r^2} \partial_{\theta\theta}^2 f|_{(r,\theta)}$$