## ESERCIZI DI ANALISI MATEMATICA 1 – SETTIMANA 24

0.1. **Teorema della funzione implicita.**

(1) *(Es 4, pag 387)* Studiate e disegnate approssimativamente gli insiemi di livello delle funzioni
  (a) $F(x, y) := e^{xy}$;
  (b) $F(x, y) := \log(|\tan y - x|)$.

(2) Sia
$$S := \{(x, y) : xy2^{2x-y^2} = 2\}.$$
  (a) Verificate che $P := (1, 1) \in S$ e che esiste un intorno di $P$ nel quale l'insieme $S$ è sia grafico di una funzione della variabile $x$ che grafico di una funzione della variabile $y$.
  (b) Trovate l'equazione della retta tangente a $S$ nel punto $P$.

(3) *(Es 1, pag 387)* Verificate che l'equazione
$$e^{x-y} + x^2 - y^2 - e(x + 1) + 1 = 0$$
definisce implicitamente una funzione $y = f(x)$ tale che $f(0) = -1$. Dimostrate inoltre che $x = 0$ è un punto di minimo di $f$.

(4) *(Es 2, pag 387)* Dimostrate il seguente *teorema di esistenza globale* per le funzioni implicite. Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tale che
  (a) $F \in C(\mathbb{R}^2)$ e $D_y F(x, y) > 0$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$;
  (b) $\lim_{y\to+\infty} F(x, y) > 0$ e $\lim_{y\to-\infty} F(x, y) < 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$;

Allora esiste una sola funzione $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $F(x, \phi(x)) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

(5) Sia $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da
$$G(x, y) := \frac{1 + e^{-y}}{1 + x^2} + 2y - 2.$$
  (a) Verificate che l'equazione $G(x, y) = 0$ definisce una funzione $y = y(x)$ definita in un intorno di $x = 0$.
  (b) Calcolate il polinomio di Taylor fino al secondo ordine di $y = y(x)$ con centro $x = 0$.
  (c) Verificate che l'equazione $G(x, y) = 0$ definisce una unica funzione $y = y(x) \geq 0$ definita per ogni $x \in \mathbb{R}$.
  (d) Calcolate
$$\lim_{x\to+\infty} y(x).$$

(6) Verificate che l'equazione
$$G(x, y) := x^2 + y^2 + \sin y = 0$$
definisce una unica funzione $x \mapsto \phi(x)$ di classe $C^1$ e tale che $\phi(0) = 0$. Dimostrate che $\phi$ ha un punto di massimo per $x = 0$.

(7) *(Difficile)* Determinate i punti di massimo e minimo relativo delle funzioni $x \mapsto \phi(x)$ definite implicitamente dall'equazione
$$G(x, y) := x^3 - x^2y + y^3 - 8 = 0.$$

0.2. **Teorema della funzione implicita in più di due variabili.**

(1) Sia
$$S := \{(x, y, z) : z - e^{x+y} + xe^z + 1 = 0\}.$$
Scrivete l'equazione del piano tangente a $S$ in $P = (0, 0, 0)$.

(2) Verificate che l'equazione
$$x^2 + 2x + e^y + y - 2z^3 + 1 = 0$$
definisce n un intorno del punto $\mathbf{p} = (0, 0, 1)$ una superficie di equazione $y = g(x, z)$. Scrivete l'equazione del piano tangente alla superficie nel punto $\mathbf{p}$.

(3) Verificate che l'equazione
$$z + e^{z-1} - x^2 - y^2 = 0$$
definisce una unica funzione, *definita nell'intero piano* $\mathbb{R}^2$,
$$(x, y) \mapsto z(x, y).$$
Dimostrate inoltre che questa funzione ha un minimo in $(0, 0)$.

0.3. **Ancora sul teorema della funzione implicita.** I seguenti esercizi richiedono la conoscenza del Teorema 3.8 pag 384, cioè della forma più generale del teorema della funzione implicita.

(1) Verificate che il sistema
$$\begin{cases} e^z + 3x - \cos y + y = 0 \\ e^x - x - z + y - 1 = 0 \end{cases}$$
definisce implicitamente in un intorno del punto $\mathbf{q} = (0, 0, 0)$ una curva
$$t \mapsto \mathbf{r}(t) := (t, y(t), z(t)).$$
Scrivete le equazioni della retta tangente e del piano normale alla curva $\mathbf{r}$ nel punto $\mathbf{q}$.

(2) Sia $\mathbf{G} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ definita da
$$\mathbf{G}(x, y, v, z) := \begin{cases} (y + 3)v - \tan(z + v) + 2x \\ \sin(z + v) + 3y - x(z + 3) \end{cases}$$
Dimostrate che l'equazione $\mathbf{G}(x, y, v, z) = \mathbf{0}$ definisce implicitamente in un intorno di $\mathbf{0} = (0, 0, 0, 0)$ una funzione
$$(x, y) \mapsto (v(x, y), z(x, y)).$$
Calcolate $D_y v(0, 0)$.

(3) Verificate che il sistema
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + zve^x - 2 = 0 \\ xe^z + ye^v - z + v = 0 \end{cases}$$
definisce in un intorno del punto $\mathbf{p} = (0, 0, 1, 1)$ un'unica funzione
$$(x, y) \mapsto (v(x, y), z(x, y)).$$
Calcolate la matrice Jacobiana di tale funzione nel punto $(0, 0)$.

0.4. **Rette e piani tangenti.**

(1) Scrivete l'equazione parametrica del piano tangente alla superficie sferica, di raggio $R > 0$ e centro nell'origine, in un suo punto.

(2) Scrivete l'equazione parametrica del piano tangente alla superficie di un ellissoide, di semiassi $A > 0, B > 0, C > 0$ e centro nell'origine, in un suo punto.