ESERCIZI DI ANALISI MATEMATICA 1 – SETTIMANA 25

Moltiplicatori di Lagrange

(1) Trovate i punti di minima e massima distanza dall'origine sulla curva C di equazione
$$C := \{(x, y) : x^2 - y^2 + y + 1 = 0\}.$$

(2) Trovate i punti di minima e massima distanza dall'origine sulla curva C di equazione
$$C := \{(x, y) : x^4 + 4y^2 - 16 = 0\}.$$

(3) *(Vol. 2, Esempio 2.2, pag 79)*: Determinate massimi e minimi della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x, y) := xy$ soggetti al vincolo
$$g(x, y) := x^2 - xy + y^2 - 1 = 0.$$

(4) *(Vol. 2, Esempio 2.3, pag 84) Il cubo, a parità di superficie, è il parallelepipedo di volume massimo*: Utilizzate il metodo dei moltiplicatori di Lagrange per determinare il valore massimo della funzione $V : O \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita da
$$V(x, y, z) := xyz,$$
dove O è il primo ottante, cioè $O := \{(x, y, z) : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$ e soggetta al vincolo
$$g(x, y, z) := xy + xz + yz - A = 0.$$

(5) *(Vol. 2, Esercizio 5 pag 90)*: Determinate i punti più vicini all'origine della superficie S
$$S := \{(x, y, z) : z^2 - xy = 1\}.$$

(6) *(Vol. 2, Esercizio 6 pag 90)*: Determinate massimi e minimi di $f(x, y, z) := (x + y + z)^2$ vincolati a
$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1.$$

(7) *(Vol. 2, Esercizio 9 pag 90)*: Sia $f(x_1, \dots, x_n) := x_1 + \cdots + x_n$ per $n \geq 2$ e $x_1 \geq 0$, $\dots x_n \geq 0$.
   (a) Determinate il minimo di f sotto la condizione
   $$x_1 x_2 \dots x_n = 1.$$
   (b) Ottenete, dal risultato precedente, la disuguaglianza fra media aritmetica e media geometrica
   $$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dot{+} a_n}{n}, \qquad \text{con } a_1 \geq 0, \dots a_n \geq 0.$$

(8) *(Vol. 2, Esercizio 10 pag 90)*: Sia $f(x_1, \dots, x_n) := \frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}$ per $n \geq 2$ e $x_1 > 0$, $\dots$, $x_n > 0$.

(a) Determinate il minimo di f sotto la condizione

$$x_1 x_2 \dots x_n = 1.$$

(b) Ottenete, dal risultato precedente, la disuguaglianza fra media armonica e media geometrica

$$n \left(\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n} \right)^{-1} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \qquad \text{con } a_1 > 0, \dots, a_n > 0.$$