ESERCIZI DI ANALISI MATEMATICA 1 – SETTIMANA 26

0.1. **Serie e serie di potenze.**

(1) Verificate che le seguenti serie di potenze hanno raggio di convergenza $R = 1$.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x^n; \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}; \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}.$$

Studiate la convergenza delle serie precedenti negli estremi dell'intervallo di convergenza.

(2) Utilizzate, se necessario, i teoremi di Cauchy o di D'Alembert per determinate il raggio di convergenza R delle seguenti serie di potenze.

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\,x^n}{n+1}; \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3\,x^n}{(2+1/2)^n};$

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}; \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{2^n}\,x^n;$

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{3^n}; \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^n}; \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!\,x^n}{n^n}.$

(3) Determinate l'intervallo di convergenza delle serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n^2}}{n!}; \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n x^n}{\sqrt{n}}.$$

(4) Determinate l'intervallo di convergenza delle serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n^2}{5^n} x^n; \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^4 - 2n^2}{n^5 + 1}\, x^n;$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{5^n}(x+2)^n; \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^4 + 2^n}{5^n + 1}\,(x-4)^n.$$

0.2. **Serie di Taylor e di MacLaurin.**

(1) Utilizzando lo sviluppo in serie di e^x, ricavate gli sviluppi di MacLaurin di

$$e^{2x}; \qquad xe^x; \qquad \frac{e^x + e^{-x}}{2}; \qquad e^{-2x}.$$

(2) Scrivete dove possibile, lo sviluppo in serie di potenze delle funzioni

$$\frac{x}{1-x}; \qquad \frac{3}{1+x}; \qquad \frac{2}{1+3x}.$$

(3) Scrivete dove possibile, lo sviluppo in serie di potenze delle funzioni

$$x\log(1-x) \qquad \log(1-x)^3; \qquad \log(1-x^2); \qquad \log\sqrt{1+x^2}.$$

(4) Utilizzate la formula per il prodotto di due serie per calcolare lo sviluppo di MacLaurin di

$$\frac{e^x}{1-x}.$$

(5) Verificate che

$$\int_0^1 e^{x^2}\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)n!}$$

(6) Calcolate con 6 cifre decimali esatte il valore di

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Giustificate il risultato ottenuto.

(7) Verificate che

$$\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{x}\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}\frac{1}{n^2};$$

(8) Verificate che

$$\int_0^x \sin(t^2)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+3}}{(2n+1)!(4n+3)};$$

$$\int_0^x e^{-t^2}\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!};$$

0.3. **Serie di numeri complessi.**

(1) Studiate la convergenza delle seguenti serie di numeri complessi

(a) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(3+i)^n}; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1} i^n;$$

(b) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{i-1}{\sqrt{2}}\right)^n; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{n^2+i}.$$

(2) Determinate il cerchio di convergenza delle serie di potenze complesse

(a) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-3)^n}{n5^n}; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-i)^{3n}}{n!};$$

(b) $$\sum_{n=0}^{\infty} (1+ni)z^n; \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (n+3^n)(z-i)^n.$$

(3) Calcolate la somma delle seguenti serie (dove sono convergenti):

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n; \qquad \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n}.$$

(4) Individuate il luogo dei punti sul piano complesso $\mathbb{C}$ in cui le funzioni

$$g(z) := e^{z^2}; \qquad h(z) := e^{z^3}.$$

assumono modulo unitario.

(5) *(Difficile)* Trovate delle serie di potenze nella variabile complessa z, che abbiano come somma, in un opportuno cerchio di convergenza, le seguenti funzioni

$$f(z) := \frac{1}{z^2+4z+3}; \qquad h(z) := \frac{1}{z^2+z+1}.$$

Suggerimento: Il denominatore di f ha due radici reali distinte, quindi la frazione si può scrivere come somma di due fratti semplici. Per quanto riguarda h ricordate che $(1-z)^3 = (1-z)(z^2+z+1)$.

(6) *(Difficile)* Usate le formule di Eulero per dimostrare che per ogni $x \in \mathbb{R}$ valgono

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x; \qquad \sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x.$$

(7) *(Difficile)* Siano α, β numeri reali. Usate le formule di Eulero per dimostrare che, per $-1 < x < 1$, valgono le uguaglianze

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \cos(\alpha + n\beta) = \frac{\cos\alpha - x\cos(\alpha-\beta)}{1-2x\cos\beta + x^2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \sin(\alpha + n\beta) = \frac{\sin\alpha - x\sin(\alpha-\beta)}{1-2x\cos\beta + x^2}.$$