ANALISI MATEMATICA A – ANALISI MATEMATICA 1
ESERCIZI DELLA SETTIMANA 3

Numeri complessi

(1) Esprimete in forma algebrica i seguenti numeri complessi :

$$(5-2i)(3-i) \qquad \frac{2+4i}{3} \qquad \frac{2}{3-i} \qquad \frac{1+2i}{i-2}\,.$$

(2) Trovate parte reale e parte immaginaria dei numeri complessi

$$\frac{(1-i)^2-(1+2i)^2}{(2+3i)^2+(1+i)^3}; \qquad \left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4; \qquad (1+i)^{100}; \qquad (1+i)^{101}; \qquad (1+i)^{102}$$

(3) Scrivete in forma trigonometrica i seguenti numeri complessi

$$-2; \qquad i\sqrt{2}; \qquad \frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}; \qquad i\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}; \qquad \sin\alpha + i\cos\alpha$$

(4) Determinate i numeri complessi tali che:

$$\frac{1}{\overline{z}} = 1+i \qquad \frac{\operatorname{Re} z}{z} = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}i \qquad \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z = 2\,.$$

(5) Determinate le soluzioni delle equazioni:
(a) $\overline{z}\,(\operatorname{Im} z + \operatorname{Re} z) = z$
(b) $\dfrac{z}{1+i} + \overline{z} = i+1$
(c) $|z|\overline{z} = -\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i\,.$

(6) Determinate le soluzioni delle equazioni:

$$z(\overline{z}+\operatorname{Re} z) = 3+i \qquad \frac{8}{z|z|} = \sqrt{3}+i \qquad 2z^2+\overline{z} = -1\,.$$

(7) Rappresentate nel piano complesso l'insieme dei numeri complessi z che soddisfano le relazioni:

$$\begin{cases} |z+2i| > |z+4-2i| \\ |z+2| < 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} |z+2i| = |z+4-2i| \\ |z+2| < 1 \end{cases}$$

$$\left|\frac{z-1}{z+1}\right| \le 1 \qquad \begin{cases} |z-4| < |z+5| \\ \operatorname{Re} z < 1/2 \end{cases}$$

(8) Rappresentate nel piano complesso l'insieme dei numeri complessi z che soddisfano le relazioni:

$$\begin{cases} \operatorname{Re} z + 2 \operatorname{Im} z \geq 1 \\ |z + i - 3| < 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} |\operatorname{Im} z| \leq 2 \\ |z| = |z - 1| \end{cases}$$

(9) Verificate che la seguente identità è vera per ogni coppia z_1, z_2 di numeri complessi

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2.$$

(10) Supponete che $z \in \mathbb{C}$ abbia $|z| = 1$ e $z \neq 1$. Verificate che esiste $t \in \mathbb{R}$ tale che

$$z = \frac{t + i}{t - i}.$$

(11) Rappresentate nel piano complesso i seguenti numeri:

$$(1 + i)^5 \qquad \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\, i\right)^4 \qquad \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\, i\right)^9 .$$

(12) Rappresentate nel piano complesso le radici:

$$\sqrt[3]{2(i - 1)} \qquad \sqrt[4]{z}\ ,\ \text{essendo } \overline{z} = 1 + i \qquad \sqrt[4]{i + 20}\, .$$

(13) Trovate delle condizioni su $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ che garantiscano che l'equazione

$$\alpha z + \beta \overline{z} + \gamma = 0$$

abbia una sola soluzione.

(14) Sia $z \in \mathbb{C}$ un numero complesso. Scrivete in forma algebrica, trigonometrica ed esponenziale i numeri complessi che sono rispettivamente
- (a) simmetrico di z rispetto all'origine;
- (b) simmetrico di z rispetto all'asse reale;
- (c) simmetrico di z rispetto all'asse immaginario;
- (d) simmetrico di z rispetto alla bisettrice del I e III quadrante;
- (e) simmetrico di z rispetto alla bisettrice del II e IV quadrante.

(15) *(Difficile)* Indichiamo con $z_1, z_2, \dots, z_n$ le n radici n-esime di un numero complesso $w \neq 0$. Indichiamo con $p \in \mathbb{N}$ un numero naturale. Verificate che vale la seguente formula

$$\sum_{k=1}^{n} z_k^p = \begin{cases} n w^{p/n} & \text{se } p \text{ è un multiplo di } n \ (p \equiv 0 \mod (n)) \\ 0 & \text{se } p \text{ non è un multiplo di } n \ (p \not\equiv 0 \mod (n)). \end{cases}$$

(Suggerimento. Provate a farlo prima in qualche caso più semplice, per esempio con $p = 1$ e n piccolo, per esempio $n = 2$ o $n = 3$.)

Limiti di successioni

(1) Dimostrate, usando la definizione, che la successione

$$s_n := (-1)^n \frac{n}{n+1}$$

non ha limite.

(2) Dimostrate che se $\lim_{n\to+\infty} s_n = \ell$ allora $\lim_{n\to+\infty} |s_n| = |\ell|$. In quali casi vale il viceversa?

(3) Calcolate

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+3n+1}{2n^2+5n+5}; \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3+3n+1}{8n^2+5n}$$

(4) Calcolate i seguenti limiti

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2^n+3^n};$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2+2}{n^2+1}};$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n}}.$$

(5) Calcolate

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+3\sqrt{n}}{2n^2+5}; \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+3\sqrt{n}}{n^3+\cos n}.$$

Ancora su funzioni reali di variabile reale

(1) Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice *pari* se $f(x) = f(-x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$; una funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice *dispari* se $g(x) = -g(-x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
  (a) Trovate esempi di funzioni pari, dispari e né pari né dispari;
  (b) se $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una generica funzione, osservate che

$$h_e(x) := \frac{1}{2}(h(x) + h(-x)) \text{ è pari e } h_o(x) := \frac{1}{2}(h(x) - h(-x)) \text{ è dispari,}$$

  h_e si dice *parte pari di* h e h_o si dice *parte dispari di* h, inoltre

$$h(x) = h_e(x) + h_o(x);$$

  (c) disegnate la parte pari e la parte dispari di $h(x) := e^x$.

(2) Dite delle seguenti funzioni se sono pari, dispari o nè pari nè dispari:
  (a) $f(x) := x^4 - x^2 + x^3$ in $\mathbb{R}$;
  (b) $f(x) := (x+1)^2(x-1)^2$ in $[-1, 1]$;
  (c) $f(x) := \sin(\pi x/2)\cos(3x)$ in $\mathbb{R}$.

(3) Scrivete ciascuna delle seguenti funzioni come somma di una funzione pari e di una funzione dispari:
  (a) $f(x) := x^2 + 3x + 2$ in $\mathbb{R}$;
  (b) $f(x) := \sin 2x + \cos(x/2) + \tan x$ in $\mathbb{R}$;
  (c) $f(x) := \log(1 + x + x^2)$ in $\mathbb{R}$.

(4) Dite delle seguenti funzioni se sono o no periodiche in $\mathbb{R}$ e, se lo sono, determinatene il periodo:

(a) $f(x) := 1 + \sin^2 x$;
(b) $f(x) := 1 + \sin x^2$;
(c) $f(x) := 2x - [2x]$;
(d) $f(x) := x - \sin(2\pi x) - [x]$;
(e) $f(x) := x + \sin(x) - [x]$.

(5) *(Difficile!)* Diciamo che una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è *additiva* se ha la seguente proprietà

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Diciamo che una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è *moltiplicativa* se ha la seguente proprietà

$$f(xy) = f(x)f(y), \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

(a) Dimostrate che se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è monotona e additiva allora

$$f(x) = xf(1), \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(b) Dimostrate che se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è additiva e moltiplicativa allora o $f(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ oppure

$$f(x) = x, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$