# ANALISI MATEMATICA A – ANALISI MATEMATICA 1
# ESERCIZI DELLA SETTIMANA 4

## Limiti di successioni

(1) Scrivete esempi di successioni:
- monotone;
- divergenti a $+\infty$; divergenti a $-\infty$;
- convergenti a 4 oppure a $4^+$; convergenti a $\pi^+$ (oppure $\pi^-$);
- irregolari; irregolari limitate e irregolari illimitate; irregolari illimitate inferiormente ma limitate superiormente.

(2) Verificate, *facendo uso della definizione di limite*, che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1^-$$
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+1}{n+3} = +\infty;$$

(3) Dimostrate, usando la definizione, che la successione

$$s_n := (-1)^n \frac{n}{n+1}$$

non ha limite.

(4) Dimostrate che se $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = \ell$ allora $\lim\limits_{n\to+\infty} |s_n| = |\ell|$. In quali casi vale il viceversa?

(5) Calcolate

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+3n+1}{2n^2+5n+5}; \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3+3n+1}{8n^2+5n}$$

(6) Calcolate i seguenti limiti

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2^n+3^n};$$
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2+2}{n^2+1}};$$
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n}}.$$

(7) Sia $(s_n)_n$ una successione a valori reali. Dimostrate che se $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = +\infty$ allora l'insieme $\{s_n : n \in \mathbb{N}\}$ ha minimo.

(8) Calcolate

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+3\sqrt{n}}{2n^2+5}; \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+3\sqrt{n}}{n^3+\cos n}.$$

(9) Supponete che $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ siano successioni a termini positivi. Mostrate con esempi che

(a) da $\lim_{n\to+\infty}(a_n - b_n) = 0$ non segue in generale che $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n} = 1$

(b) da $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n} = 1$ non segue in generale che $\lim_{n\to+\infty}(a_n - b_n) = 0$.

(10) *Esercizi 4 e 5, pag 169:* supponete che $(s_n)_n$ sia una successione a valori positivi. Dimostrate che

(a) se $0 < k < 1$ e se, definitivamente, $\frac{s_{n+1}}{s_n} < k$ allora $\lim_{n\to+\infty} s_n = 0$;

(b) se $k > 1$ e se, definitivamente, $\frac{s_{n+1}}{s_n} > k$ allora $\lim_{n\to+\infty} s_n = +\infty$;

(c) se $\lim_{n\to+\infty}\frac{s_{n+1}}{s_n} = \ell > 1$ allora $\lim_{n\to+\infty} s_n = +\infty$;

(d) se $\lim_{n\to+\infty}\frac{s_{n+1}}{s_n} = \ell < 1$ allora $\lim_{n\to+\infty} s_n = 0$.

Con esempi, mostrate che se $\lim_{n\to+\infty}\frac{s_{n+1}}{s_n} = 1$ non potete conoscere nè esistenza nè eventuale valore di $\lim_{n\to+\infty} s_n$.

(11) Utilizzate l'esercizio precedente per calcolare

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n!}{2^n}.$$

(12) Calcolate

(a) $\lim_{n\to+\infty}\frac{n!}{(n+1)! - n!}$; $\qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{n}\sin(n!)}{n+1}$;

(b) $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^n$, $\quad x\in\mathbb{R}$;

(c) $\lim_{n\to+\infty}\frac{n! - e^n}{n^{10} + \log n}$; $\qquad \lim_{n\to+\infty} n\log\left(1+\frac{3}{n}\right)$

**Serie numeriche**

(1) Calcolate la somma delle serie "telescopiche"

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}, \qquad \sum_{n=2}^{+\infty}\log\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$

(2) Calcolate la somma delle serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{3}{4^n}, \qquad \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{3^{2n+4}}$$

(3) *(Vedi Esercizio 11, pag 452)* Scrivete come frazione il valore di

(a) $\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{3^n}$; $\qquad 0,\overline{9} := \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{9}{10^n}$

(b) utilizzate la formula per il calcolo della somma di una serie geometrica per scrivere come frazione il numero razionale $1,234\overline{56}$

(4) Dimostrate, usando la definizione di convergenza di una serie, che se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ sono convergenti allora $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n + b_n)$ è convergente e $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda a_n$ è convergente per qualsiasi $\lambda \in \mathbb{R}$. Mostrate con esempi che le implicazioni inverse sono false.

**Esercizi diversi**

(1) Calcolate i limiti

$$\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right); \qquad \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=2}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right).$$

(*Ricordate che* $\prod_{k=2}^{n} a_k := a_2 a_3 \dots a_n$)

(2) Calcolate il limite per $n \to +\infty$ delle seguenti successioni in $\mathbb{C}$.

(a) $\lim_{n\to+\infty} \frac{i^n}{n}$; $\qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{(1+i)^n}{n}$;

(b) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+3i} - \frac{ni}{n+1}$; $\qquad \lim_{n\to+\infty} n \left(\frac{1+i}{2}\right)^n$

*(Diciamo che una successione $z_n := a_n + ib_n$ converge per $n \to +\infty$ a un numero complesso $z := a + ib$ se $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$ e $\lim_{n\to+\infty} b_n = b$.)*

(3) *(Difficile: Esercizio 13 pag 170)*

(a) Dimostrate che

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \implies \lim_{n\to+\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \ell;$$

(b) mostrate, con un esempio, che l'implicazione inversa non vale;

(c) dimostrate, utilizzando (a) che

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \quad \text{e} \quad a_n > 0, \quad \forall n \geq 1 \implies \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} = \ell;$$

(4) *(Difficile)* Dimostrate che

$$\lim_{n\to+\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}} \right) = 2$$

(5) *(Difficile)* Sia $(s_n)_n$ una successione a valori reali. Dimostrate che se

$$s_n > 0 \text{ per ogni } n \text{ e } \lim_{n\to+\infty} s_n = 0$$

allora esistono infiniti numeri naturali $n$ tali che

$$s_n > s_{n+k} \quad \text{per ogni } k = 1, 2, 3, \dots.$$

**Successioni definite per ricorrenza**

(1) Sia $(f_n)_n$ la successione definita "per ricorrenza" da

$$\begin{cases} f_1 := f_0 := 1 \\ f_{n+1} := f_n + f_{n-1} \quad \text{per } n \geq 1 \end{cases}$$

Dimostrate che $\lim_{n \to +\infty} f_n = +\infty$

*(Suggerimento) Dimostrate che $(f_n)_n$ è monotona crescente e illimitata.*

(2) *(Difficile)* Sia $(s_n)_n$ la successione definita "per ricorrenza" da

$$\begin{cases} s_0 := 2 \\ s_{n+1} := \frac{1}{2} s_n + \frac{1}{s_n} \quad \text{per } n \geq 0 \end{cases}$$

Dimostrate che $(s_n)_n$ ha limite e calcolate $\lim_{n \to +\infty} s_n$

*(Suggerimento) Dimostrate che $s_n \geq \sqrt{2}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e poi dimostrate che $(s_n)_n$ è monotona decrescente e utilizzate il Teorema 2.10 di esistenza del limite per funzioni (successioni) monotone.*

(3) *(Difficile)* Sia $(s_n)_n$ la successione definita "per ricorrenza" da

$$\begin{cases} s_1 := 1 \\ s_{n+1} := 1 + \sqrt{s_n}, \quad \text{per } n \geq 1 \end{cases}$$

Dimostrate che $(s_n)_n$ ha limite e che $\lim_{n \to +\infty} s_n = \dfrac{1}{2}(3 + \sqrt{5})$

*(Suggerimento) Dimostrate che $(s_n)_n$ è crescente e limitata da sopra da $\frac{1}{2}(3 + \sqrt{5})$.*