ANALISI MATEMATICA A – ANALISI MATEMATICA 1
ESERCIZI DELLA SETTIMANA 5

Serie numeriche

(1) Determinate per quali valori del parametro reale x la seguente serie numerica sia convergente

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x^2+1}{8}\right)^n$$

e calcolatene la somma.

(2) Dimostrate, usando la definizione di convergenza di una serie, che se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ sono convergenti allora $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n)$ è convergente e $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda a_n$ è convergente per qualsiasi $\lambda \in \mathbb{R}$. Mostrate con esempi che le implicazioni inverse sono false.

(3) Studiate la convergenza delle seguenti serie numeriche utilizzando la condizione necessaria di convergenza e i criteri del confronto e del confronto asintotico. Ricordate in particolare che $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ è convergente se $\alpha > 1$ e divergente se $\alpha \leq 1$.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+4}{n^4+1}; \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+2}{n^2+1}; \qquad \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2-n}}$$

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4n^2+n}} \qquad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n+\log n}{(n-\log n)^3}; \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{e^n}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^2; \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+\log n}{\sqrt[3]{n}}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2-n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}; \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{e^{\sqrt[3]{n}}}$$

(4) Utilizzate il criterio del confronto per stabilire per quali valori dei parametri le seguenti serie numeriche sono convergenti;

(a) per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ è convergente

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+n^\alpha}{n^3+n^{2\alpha}}$$

(b) per quali valori di $\beta \in \mathbb{R}$ è convergente

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+n^\beta}{n^3+n^{\beta+1}}$$

(5) Stabilite, in funzione del parametro reale α, il carattere delle seguenti serie.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha^n}{\alpha^n + 2^n} \qquad \alpha \neq -2$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n - n!}{(\alpha n)^n - e^n}$$

(6) *(Esercizio 6, pag 451)* Trovate per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ risultano convergenti o assolutamente convergenti le seguenti serie.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Esercizi diversi su serie numeriche

(1) (*Difficile*) Utilizzate i *criteri della radice o del rapporto* per studiare il carattere delle seguenti serie numeriche

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{10}}{n!}; \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\sqrt[3]{n}}}; \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{5^n};$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3 - n}}; \qquad \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{\log \log n}{\log n} \right)^n$$

(2) (*Difficile*) Utilizzate il *criterio di condensazione* (vedi *Teorema 2.10 pag 437*) per studiare la convergenza di

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{n+1}{n}}}.$$

(3) (*Difficile*) Sia $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ una serie convergente con addendi non negativi.

(a) Dimostrate che se per ogni $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} \leq a_n$ allora $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} n a_n = 0$.

(b) Mostrate, con un esempio, che l'implicazione inversa è falsa.

(4) (*Difficile*) Sia $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ una serie convergente con addendi non negativi.

Dimostrate che la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ è convergente.

(5) (*Difficile?*) Calcolate

$$\sum_{n,k=2}^{+\infty} \frac{1}{n^k}$$

Suggerimento: Sommate prima "per riga" e poi "per colonna".

Limiti

(1) Trovate esempi di funzioni tali che

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty; \qquad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty;$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = -2; \qquad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = 2, \qquad \lim_{x\to x_0^-} f(x) = -3;$$

$$\dots$$

Disegnate approssimativamente i grafici delle funzioni nei casi che avete esaminato.

(2) Calcolate i seguenti limiti. (È sufficiente utilizzare algebra elementare e i Teoremi 2.6, 2.7, 2.8 del Capitolo 4).

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-6x+10}{x^2-x-3}; \qquad \lim_{x\to 0} \frac{12x^2-2}{\frac{1}{5x}}; \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{x^4+2x^2}{x^7}$$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x^5-1}{x^2-1}; \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{2x^2+x+5}{(x-2)^2}; \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{x^5-\frac{1}{2x^3}}{2x^4+5}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}; \qquad \lim_{x\to +\infty} \sqrt{x+1}-\sqrt{x-2}; \qquad \lim_{x\to -\infty} |x|-\sqrt{2-x}$$

$$\lim_{n\to +\infty} \sqrt{n}-\sqrt[3]{n}; \qquad \lim_{n\to +\infty} \frac{\sqrt[3]{n}+\sqrt[6]{n}}{\sqrt{n}-1}; \qquad \lim_{n\to +\infty} \frac{3n^2-n+1}{4n^2+10}$$

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{\sqrt{x+9}-\sqrt{4x}}{\sqrt{x-3}}; \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x+16}-4}{|x|}; \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{4x-1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-1}}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^2-1}.$$

Ancora su limiti

(1) *(Esercizio 11, pag 156)* P e Q sono i polinomi di grado n e m definiti da

$$P(x) := a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \qquad Q(x) := b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0.$$

Supponiamo che $a_n \neq 0$ e $b_m \neq 0$. Discutete, in funzione di n e m, il valore di

$$\lim_{x\to \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

(2) Utilizzate i limiti seguenti, se utili,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1; \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}; \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1;$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1; \qquad \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha-1}{x} = \alpha, \quad \text{per } \alpha\in\mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\log x}{x^\alpha} = 0, \quad \text{per ogni } \alpha > 0; \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{x^k}{e^x} = 0, \quad \text{per ogni } k > 0.$$

per calcolare:

$$\lim_{x\to 0^+} \sin x \log(1/x); \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{1-\cos x}{\log\left(\frac{x}{x-1}\right)}; \qquad \lim_{x\to 1} \frac{\sin \pi x}{x-1}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x^2) - \log(1+3x)}{\sin(x^4) + \log(1+x^4)} \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{10x + 3x^4 - 2x^2}{x + \log x + x^4}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{e^x - 1}; \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos(2x)}{\log(1+x) - x^3}; \qquad \lim_{x\to 1^+} \frac{\log(1+\sqrt{x-1})}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sinh(x)}{x}; \qquad \text{ricordate che } \sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

(3) *Esercizio 8 pag 156*: calcolate in funzione di $a \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to +\infty} x(a + \sin x).$$

(4) *Esercizio 16 pag 175*: calcolate in funzione di $a \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to +\infty} x \left(\frac{3 + x^a}{2 + x}\right)^x.$$

(5) *(Esercizio 7, pag 156)* Dimostrate che se $f(x) > 0$ definitivamente per $x \to x_0$ e se esiste $l := \lim_{x\to x_0} f(x)$ allora $l \geq 0$.

Esercizi sull'uso dei simboli $\sim$ e o

Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

- Se

$$\lim_{x\to x_0, \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

si dice che

$f \sim g$ per $x \to x_0, (\pm\infty)$ e si legge: f è asintotica a g per $x \to x_0(\pm\infty)$

- Se

$$\lim_{x\to x_0, \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

si dice che

$f = o(g)$ per $x \to x_0, (\pm\infty)$, e si legge:

f è o-piccolo di g oppure f è infinitesima rispetto a g per $x \to x_0, (\pm\infty)$

Se $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dite quali delle seguenti implicazioni sono vere (motivate la risposta se affermativa, se negativa fate dei contro esempi e, se possibile, discutete in che condizioni sia invece vera):

(1) $f \sim g \implies f = o(g)$, per $x \to x_0$;
(2) $f \sim g$ per $x \to x_0 \implies \lim_{x\to x_0} \big(f(x) - g(x)\big) = 0$;
(3) $f(x) = o(x)$ per $x \to +\infty \implies f(x) = o(x^2)$ per $x \to +\infty$;
(4) $f(x) = o(x)$ per $x \to 0 \implies f(x) = o(x^2)$ per $x \to 0$;
(5) $f(x) = o(x)$ per $x \to 0 \implies xf(x) = o(x^2)$ per $x \to 0$;
(6) $f(x) = o(x) \wedge g(x) = o(x^2)$ per $x \to 0 \implies f(x) + g(x) = o(x^2)$ per $x \to 0$;
(7) $f(x) = o(x) \wedge g(x) = o(x^2)$ per $x \to 0 \implies f(x) + g(x) = o(x)$ per $x \to 0$;

(8) $f(x) = o(x)$ per $x \to 0 \implies f(x^2) = o(x^2)$ per $x \to 0$;