ANALISI MATEMATICA A – ANALISI MATEMATICA 1
ESERCIZI DELLA SETTIMANA 6

Funzioni. Funzioni continue

(1) $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$ è definita da $f(x) := \dfrac{x^2-1}{x+1}$. Estendete la definizione di f (cioè definite la funzione f anche nel punto $x = -1$) in modo che la funzione estesa sia continua su $\mathbb{R}$.

(2) Stabilite se le seguenti funzioni

$$\frac{x}{|x|}, \qquad \frac{1}{1+x+\frac{x}{|x|}}, \qquad \sin\left(\frac{\pi x}{|x|}\right)$$

inizialmente definite sul proprio naturale insieme di definizione, si possano estendere a funzioni continue su tutto $\mathbb{R}$.

(3) Sapendo che $\lim_{x\to 0} \dfrac{\arctan x}{x} = 1$, determinate per quali $a, b \in \mathbb{R}$ la seguente funzione è continua in $(-1, 1)$

$$f(x) := \begin{cases} x^a|\sin(1/x)| & 0 < x < 1 \\ 0 & x = 0 \\ |x|^b \arctan x & -1 < x < 0 \end{cases}$$

(4) (*(Molto importante!) Esercizio 1 pag 209:*) $f : [a, b] \to [a, b]$ è una funzione continua. Diciamo che un punto $x^* \in [a, b]$ è un *punto fisso di f in $[a, b]$ se $f(x^*) = x^*$.*
 (a) Dimostrate che esiste un punto fisso di f in $[a, b]$.
 (b) Fate un *disegno* e *interpretate graficamente* l'enunciato.

(5) (*Esercizio 5 pag 210:*) Utilizzate i grafici (approssimativi) delle funzioni in oggetto per determinare in quali intervalli possono esistere delle soluzioni delle equazioni
 (a) $\tan x = e^x$;
 (b) $\log |x| = \cos x$.
Utilizzate il metodo di bisezione negli intervalli individuati prima (e una calcolatrice per fare i calcoli!) per determinare una soluzione dell'equazione con almeno due cifre decimali esatte.

(6) Dimostrate che: se $f \in C(\mathbb{R})$ e se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ allora f ha minimo in $\mathbb{R}$.

(7) Una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ si dice Lipschitz continua in I se esiste $L > 0$ tale che

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y| \qquad \text{per ogni } x, y \in I.$$

 (a) Dimostrate la seguente affermazione: *se I è limitato e se f è Lipschitz continua in I allora f è limitata in I.*
 (b) Mostrate con un esempio che la conclusione è falsa se I non è un intervallo limitato.

(8) (*Esercizio 4 pag 240:*) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione continua. Un numero $\alpha > 0$ è un *periodo* di f se

$$f(x + \alpha) = f(x), \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Indichiamo con $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^+$ l'insieme dei periodi di f e supponiamo che $\mathcal{P}$ non sia vuoto.

(a) Dimostrate che se $\inf \mathcal{P} > 0$ allora $\inf \mathcal{P}$ è un periodo di f.
(b) Dimostrate che se $\inf \mathcal{P} = 0$ allora f è costante.
(c) (*Difficile?*) Mostrate, con un esempio, che l'affermazione precedente è falsa senza l'ipotesi di continuità per f.

(9) Dimostrate che la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da
$$f(x) := [x] + \sqrt{x - [x]}$$
è continua e monotona crescente in $\mathbb{R}$.

(10) Supponete che $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sia continua in un punto x_0 fissato. Dimostrate che se f assume valori positivi e negativi in ogni intorno di x_0 allora $f(x_0) = 0$.

(11) Studiate iniettività, suriettività e continuità delle funzioni f e g definite nel modo seguente:
(a) $f(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathbb{Z} \\ x & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}. \end{cases}$
(b) $g(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ x & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 1/x & \text{se } x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}. \end{cases}$

Ulteriori esercizi

(1) Supponete che $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sia una funzione crescente. Dimostrate che se f assume tutti i valori compresi fra $f(a)$ e $f(b)$ allora f è continua in $[a, b]$. L'implicazione sarebbe vera senza l'ipotesi che f sia crescente?

(2) (*Esercizio 5 pag 240:*) Dimostrate che l'insieme delle funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodiche e con *periodo razionale* è uno spazio vettoriale (e.g. spazio lineare).

(3) *Sia f una funzione definita su un intervallo I, limitato o illimitato. Diciamo che f è convessa in I se*
$$f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y), \qquad \forall x, y \in I, \quad \forall t \in (0, 1)$$
e che f è concava in I se
$$f(tx + (1 - t)y) \geq tf(x) + (1 - t)f(y), \qquad \forall x, y \in I, \quad \forall t \in (0, 1).$$
Vedete i disegni a pag 287–288.
(a) Trovate esempi di funzioni concave e convesse.
(b) Se f è convessa in $[a, b]$ dove possono essere i punti di massimo di f in $[a, b]$.
(c) (*Difficile*) Dimostrate che se f è convessa in I allora è continua in I.

(4) Sia $f : [a, b] \to [a, b]$ una funzione continua. Fissate un punto $x_0 \in [a, b]$ e definite per ricorrenza la successione $(x_n)_n$ nel modo seguente
$$x_{n+1} := f(x_n), \qquad n \geq 0.$$
Dimostrate le seguenti affermazioni.
(a) Se f è crescente allora la successione $(x_n)_n$ è monotona e se indichiamo con ℓ il suo limite (osservate che tale limite esiste certamente) allora $\ell = f(\ell)$.
(b) Se f è decrescente allora le due (sotto)successioni $(x_{2k})_k$ e $(x_{2k+1})_k$ sono monotone e convergenti.

(5) *(Difficile)*

(a) Dimostrate la seguente affermazione: *se I è un intervallo, se $f : I \to \mathbb{R}$ è continua in I e se ogni punto $x \in I$ è di minimo relativo per f allora f è costante in I.*

(b) Mostrate, con un esempio, che l'affermazione è falsa senza l'ipotesi di continuità di f.

(6) (*Difficile*) Studiate iniettività, suriettività e continuità di $f : \mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^+$ definita nel modo seguente:

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{Q}^+ \\ 1/q & \text{se } x \in \mathbb{Q}^+ \setminus \{0\} \text{ e se } x = p/q \text{ con } p \text{ e } q \text{ primi fra loro.} \end{cases}$$