ANALISI MATEMATICA A – ANALISI MATEMATICA 1
ESERCIZI DELLA SETTIMANA 7

(1) Calcolate le derivate delle seguenti funzioni elementari (definite nel loro naturale insieme di definizione):
   (a) $f(x) := \dfrac{8}{x^4} + 5x^3 - \dfrac{x+1}{x^2+1}; \qquad g(x) := \dfrac{1}{1-x^2};$
   (b) $f(x) := \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{k+1}; \qquad g(x) := \sqrt{x+\sqrt{x}};$
   (c) $h(x) := \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k};$
   (d) $f(x) := \dfrac{(x+\alpha)(x+\beta)}{x^n}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$

(2) Calcolate le derivate delle seguenti funzioni elementari (definite nel loro naturale insieme di definizione):

$$f(x) := \sin(2\arctan x); \qquad g(x) := \log\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}; \qquad h(x) := \log(\log x);$$
$$f(x) := \cosh(\sinh x); \qquad g(x) := x^{x(x-1)}; \qquad h(x) := (x^2+2)^{\sin x}.$$

(3) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) := x + 2^x$.
   (a) Verificate che f è iniettiva e quindi invertibile;
   (b) Calcolate l'equazione della retta tangente al grafico della funzione inversa f^{-1}, $x \mapsto f^{-1}(x)$, per $x = 1$.

(4) Calcolate l'equazione della retta passante per l'origine e tangente al grafico della funzione $x \mapsto 2^x$.

(5) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) := \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ ax^3 + bx^2 + cx + d & 0 < x < 1 \\ x & 1 \leq x \end{cases}$.
   (a) Trovate a, b, c, d in modo che f sia di classe C^1 in $\mathbb{R}$.
   (b) Disegnate approssimativamente il grafico di f.

(6) Sia $f(x) := |x|^3$.
   (a) Calcolare $f'(0)$ e $f''(0)$.
   (b) Dimostrate che $f^{(3)}(0)$ non esiste.
   (c) Estendete questo risultato alla funzione $f(x) := |x|^n$, per $n \in \mathbb{N}$.

(7) Determinate dove le seguenti funzioni sono derivabili e poi calcolatene la derivata:

$$f(x) := \sqrt{x + |x|^3 + 1}; \qquad g(x) := \cosh|x|;$$

(8) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile e tale che tale che

$$f'(x) = f(x), \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Mostrate che f ammette derivate di qualunque ordine e che tutte le derivate sono uguali fra loro.

(9) Derivando la funzione $f(x) := (1 + x)^n$, calcolate $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k}$.

(10) *(Difficile)* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione periodica di periodo 2. Sapendo che $f(x) = 4x(1 - |x|)$ per $x \in [-1, 1]$, dimostrate che $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.