ANALISI MATEMATICA A – ANALISI MATEMATICA 1
ESERCIZI DELLA SETTIMANA 8

(1) Determinate per quali delle seguenti funzioni il punto $x = 1$ è un punto di massimo relativo:

$$(i) \quad (x-1)^5 - (x-1)^4 \quad , \quad (ii) \quad (x-1)^5 + (x-1)^4;$$
$$(iii) \quad (x-1)^4 + (x-1)^3 \quad , \quad (iv) \quad x^5 + x^4 - 2\,.$$

(2) Determinate i punti e i valori di massimo assoluto e di minimo assoluto delle seguenti funzioni nell'intervallo indicato:

$$(i) \quad \frac{x-2}{x^2}\,, \quad x \in [3,5];$$
$$(ii) \quad 4x^3 + 9x^2 - 12x + 1, \quad x \in [-1,1];$$
$$(iii) \quad x^3 - 6x^2 + 9x + 1\,, \quad x \in [-2,2]\,.$$

(3) Per $a \in \mathbb{R}$ sia $g_a : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ definita da $g_a(x) := (x-a)e^{-x^2}$.
In funzione del parametro a, determinate se esistono i punti di massimo e minimo assoluto di g_a in $[0,+\infty)$ e trovate tali punti.
Disegnate approssimativamente i grafici delle funzioni g_a in $[0,+\infty)$.

(4) Per ciascuna delle seguenti funzioni trovate, se esistono, i punti e i valori di massimo o minimo assoluto e relativo.

$$f(x) := \begin{cases} \frac{2x-x^2}{2x^2+1} & x < -\frac{1}{2} \\ -x - \frac{4}{3} & -\frac{1}{2} \le x < 0 \\ -x^3 + 2x^2 - x + 1 & x \ge 0 \end{cases}$$

$$g(x) := \begin{cases} \frac{2}{3}x^3 - 3x^2 + 4x & 0 \le x \le 3 \\ 3e^{3-x} & 3 < x. \end{cases}$$

(5) Calcolate la derivata n-esima di

$$f(x) := \frac{ax+b}{cx+d}, \qquad a,b,c,d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc \neq 0.$$

(6) Determinate per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ l'equazione

$$x^3 - 6x^2 + 9x + k = 0$$

ammette una sola radice reale.

(7) Calcolate il volume massimo e la superficie laterale massima di un cilindro (circolare retto) inscritto in una sfera di raggio unitario.

(8) Calcolate il volume massimo e la superficie laterale massima di un cono (circolare retto) inscritto in una sfera di raggio unitario.

(9) Calcolate i seguenti limiti:

(a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(e^{3x}+2x-1)}{x}$; $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2(x)}{\log(\sin(x))}$

(b) $\lim_{x\to 0} \Big(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\Big)$; $\lim_{x\to+\infty} x\big(\frac{\pi}{2}-\arctan x\big)$

(c) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}+2x^2-1}{\cos(\frac{\pi}{2}\cos(x))}$; $\lim_{x\to 0} x\log\left(\frac{1}{x^2}\right)$

(10) Studiate l'andamento delle seguenti funzioni e disegnatene grafico. In particolare specificate il loro naturale dominio di definizione, le eventuali intersezione con gli assi, le eventuali simmetrie rispetto gli assi, il segno, i limiti al bordo del dominio, gli eventuali punti di discontinuità, gli asintoti; calcolate la derivata prima e trovate massimi e minimi relativi e globali, i punti di non derivabilità; calcolate la derivata seconda e studiate la convessità.

[Polinomiali e fratte

$$\frac{1+3x^4}{x^2}; \qquad \frac{2x^2+4x-11}{x^2+2x-8}; \qquad \frac{x^2-x+1}{x^3-2x^2+x}; \qquad \frac{2x^3+x-1}{x-2};$$

[Radici

$$\sqrt[3]{(x^2-5x+6)^2}; \qquad \sqrt{\frac{x^3+1}{4x-5}}; \qquad \sqrt{\frac{x^4-x^2+1}{x^3-x}}; \qquad \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}$$

[Esponenziali

$$\frac{e^{x-1}}{x+1}; \qquad \frac{e^x}{2x-1}; \qquad e^{-x^3+1}; \qquad xe^{\frac{x+1}{x-1}}; \qquad x^3e^{-x};$$

[Logaritmi

$$\frac{\log(x)+2}{x}; \quad x\log^2(x); \quad \log\left(\frac{1}{x^2+1}\right); \quad x+\log\left(\frac{1+2x}{x}\right);$$

[Trigonometriche e altro

$$4\cos(x)+2\cos(2x)-1; \qquad \frac{\cos(x)}{\sin(x)-1}; \qquad \sqrt{1+e^x}$$

(11) Tracciate i grafici della famiglia di funzioni f_m che si ottengono al variare del parametro m

$$f_m(x) := \frac{(x-1)^m}{x^{m-1}}, \qquad m\in\mathbb{N}\setminus 0.$$

(12) Studiate l'andamento delle seguenti funzioni e disegnatene grafico.

$$f(x) := \log\left|1-\frac{1}{\log|x|}\right|; \qquad g(x) := \log\left|x+\log(x^2)\right|.$$

(13) Studiate l'andamento e disegnate il grafico delle funzioni $f_p : (0,+\infty)\to\mathbb{R}$, definite da

$$f_p(x) := x^{-2p}-2x^{-p}, \qquad \text{dove } p\ge 0 \text{ è un parametro.}$$

(14) Tracciate i grafici della famiglia di funzioni g_α che si ottengono al variare del parametro α

$$g_\alpha(x) := x+\frac{\alpha x}{\log x}, \qquad \alpha\in\mathbb{R}.$$

(15) Sia $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile. Dimostrate che se $f(a) = \lim_{x\to+\infty} f(x)$ allora esiste $c \in [a, +\infty)$ tale che $f'(c) = 0$.

(16) Sia $f \in \mathcal{C}[a, b]$, derivabile in (a, b) con $f'(x) \leq M$ per ogni $x \in (a, b)$. Dimostrate che: se $f(b) - f(a) = M(b - a)$ allora $f(x) = f(a) + M(x - a)$ in $[a, b]$.

(17) *(Difficile)* Siano $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ due funzioni derivabili. Dimostrate che la funzione massimo fra le due, $h(x) := \max(f(x), g(x))$ è derivabile tranne che, al più, in un insieme numerabile di punti.

(18) *(Difficile):* Sia $f \in \mathcal{C}[a, b]$, derivabile in (a, b) e con $f(a) = f(b) = 0$. Dimostrate che: per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ esiste $c \in (a, b)$ tale che $f'(c) = \lambda f(c)$.