ANALISI MATEMATICA A – ANALISI MATEMATICA 1
ESERCIZI DELLA SETTIMANA 9

(1) Utilizzate gli sviluppi di Taylor (MacLaurin) noti di alcune funzioni elementari (vedi Esempi 2.16, 2.17 e 2.18 a pag 282 e 283) per scrivere i primi termini dei polinomi di Taylor con centro in $x_0 = 0$ delle seguenti funzioni:

(a) $f(x) := \log(1 + \sinh(x)) - x$;
(b) $f(x) := \sin(x^2) - \tan(x^2)$;
(c) $f(x) := \sinh(x) - x\cosh(x)$;
(d) $f(x) := \sin(\log(x + 1)) + x\log(\sin(x)) - x\log(x) - x$
(e) $f(x) := 2\arctan(\sin(x)) - \sin(2x)$;

Scrivete esplicitamente nei vari casi la forma del resto secondo Peano.

(2) (a) Determinate il polinomio di Taylor di ordine 3 centrato nel punto $x_0 = 0$ della funzione $f(x) := \sqrt{1 + \sin x}$.
(b) Determinate il polinomio di Taylor di ordine 5 centrato nel punto $x_0 = 0$ della funzione $g(x) := x^2 \log(1 + \sin x)$.

(3) Utilizzate l'esperienza acquisita con gli esercizi precedenti per calcolare, nel caso esistano, i seguenti limiti:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(e^{3x} + 2x - 1)}{x}$; $\qquad \displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2(x)}{\log(\sin(x))}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right)$; $\qquad \displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right)$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{e^{x^2} + 2x^2 - 1}{\cos(\frac{\pi}{2}\cos(x))}$; $\qquad \displaystyle\lim_{x\to0} x\log\left(\frac{1}{x^2}\right)$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\log^2(1 + \sin x)}{x\tan x}$; $\qquad \displaystyle\lim_{x\to0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2}$;

(e) $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \frac{\sqrt{1 - \cos x} - 3\sin x}{x}$; $\qquad \displaystyle\lim_{x\to0^-} \frac{\sqrt{1 - \cos x} - 3\sin x}{x}$;

(f) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{x - \sin^2\sqrt{x} - \sin^2 x}{x^2}$; $\qquad \displaystyle\lim_{x\to0} \frac{((1 - x)^{-1} + e^x)^2 - 4e^{2x} - 2x^2}{x^3}$;

(4) Scrivete la formula di Taylor, con centro in $x_0 = 0$ e con resto secondo Lagrange, per la funzione $x \mapsto e^x$.
Utilizzate tale formula per stimare il valore di $\sqrt[4]{e}$ con un errore inferiore a 10^{-3}.
Giustificate il risultato ottenuto. *(Utilizzate pure la stima elementare* $2 < e < 4$*).*

(5) (*pag 299 Es 18*)
(a) Se dovete calcolare $\sin 1$ oppure $\cos 1$ con 5 cifre decimali esatte usando la formula di Mac Laurin con resto secondo Lagrange per $\sin x$ oppure per $\cos x$, quanti termini dovete considerare?
(b) Se dovete calcolare $\sin 1$ oppure $\cos 1$ con h cifre decimali esatte usando la formula di Mac Laurin con resto secondo Lagrange per $\sin x$ oppure per $\cos x$, quanti termini dovete considerare?

Alcuni esercizi più difficili.

(1) *(Difficile)* Verificate che la funzione

$$f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

è derivabile infinite volte nel punto $x_0 = 0$. Scrivetene il polinomio di Mac Laurin.

(2) (*Difficile*) Provate a calcolare $\log 48$ alla seconda cifra decimale (... *solo con carta e penna*).

(3) (*Difficile*) Sapendo che per (per $x > -1$) la derivata di $\log(1 + x)$ è $\dfrac{1}{1+x}$ e che valgono i seguenti sviluppi di Mac Laurin

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{N} x^k + \frac{x^{N+1}}{1-x} = \sum_{k=0}^{N} x^k + o(x^N), \qquad x \neq 1$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k x^k + \frac{(-1)^{N+1} x^{N+1}}{1-x} = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k x^k + o(x^N), \qquad x \neq 1,$$

verificate che per $x > -1$ lo sviluppo di Mac Laurin di $\log(1+x)$ si può ricavare (ignorando gli o-piccoli) determinando il polinomio che vale 0 per $x = 0$ e la cui derivata è il polinomio di Mac Laurin di $\dfrac{1}{1+x}$.

Analogamente a quanto fatto sopra, ricavate lo sviluppo di Mac Laurin di $\arctan x$ senza calcolare le derivate successive, ma basandosi solo sulla sua derivata prima.

(4) (*Difficile*) Utilizzate lo sviluppo di Taylor con resto di Lagrange di e^x per calcolare

$$\lim_{n \to +\infty} n \sin(2\pi n! e)$$

Infine, alcuni esercizi riepilogativi su differenziabilità, proprietà delle funzioni derivabili, relazioni fra segno delle derivate e andamento delle funzioni.

(1) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che

$$|f(x) - f(y)| \leq (x - y)^2, \qquad \text{per ogni } x, y \in \mathbb{R}.$$

Dimostrate che f è costante.

(2) Dimostrate che le funzioni derivabili pari (dispari) hanno derivata dispari (pari).
Come conseguenza di questo fatto osservate che se f è n volte derivabile in $\mathbb{R}$ e pari allora

$$f'(0) = f^{(3)}(0) = f^{(5)}(0) = \cdots = 0$$

e se f è n volte derivabile in $\mathbb{R}$ e dispari allora

$$f(0) = f^{(2)}(0) = f^{(4)}(0) = \cdots = 0.$$

Quindi il polinomio di MacLaurin di una funzione pari contiene solo termini di grado pari, mentre il polinomio di MacLaurin di una funzione dispoari contiene solo potenze di grado dispari.

(3) Dimostrate che l'equazione

$$x^n + px + q = 0, \qquad p, q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},$$

ha, al più due radici reali per n pari e tre radici reali per n dispari.

(4) Considerate un polinomio $P(x)$. Allora:

- cosa potete dire del numero delle soluzioni dell'equazione $P'(x) = 0$ comprese fra due soluzioni consecutive dell'equazione $P(x) = 0$?
- cosa potete dire del numero delle soluzioni dell'equazione $P(x) = 0$ comprese fra due soluzioni consecutive dell'equazione $P'(x) = 0$?
- fissate $n \in \mathbb{N}$ e sia $P(x) := 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$. Dimostrate che l'equazione $P(x) = 0$ ha una sola soluzione reale per n dispari e nessuna soluzione reale per n pari.

(5) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile. Supponete che $f'(x_0) = 0$ per ogni x_0 tale che $f(x_0) = 0$. Dimostrate che $|f(x)|$ è derivabile.