Formula di Taylor

Il comando "Series" calcola il polinomio di Taylor della funzione argomento, con centro nel punto indicato e fino all'ordine indicato.

```
Series[Exp[x + x^2], {x, 0, 6}]
```

$$1 + x + \frac{3x^2}{2} + \frac{7x^3}{6} + \frac{25x^4}{24} + \frac{27x^5}{40} + \frac{331x^6}{720} + O(x^7)$$

```
Series[Exp[x^2], {x, 6, 4}]
```

$$e^{36} + 12\,e^{36}(x-6) + 73\,e^{36}(x-6)^2 + 300\,e^{36}(x-6)^3 + \frac{1873}{2}e^{36}(x-6)^4 + O\left((x-6)^5\right)$$

```
Series[ArcTan[x], {x, 0, 10}];
Print[%]
```

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} + O(x^{11})$$

Se vogliamo il polinomio senza l'indicazione dell'errore usiamo il comando "Normal"

```
Normal[Series[Exp[x^2], {x, 0, 4}]]
```

$$1 + x^2 + \frac{x^4}{2}$$

```
Normal[Series[Sin[x], {x, Pi, 10}]]
Print["Polinomio di Taylor=" %]
```

$$-\frac{(x-\pi)^9}{362\,880} + \frac{(x-\pi)^7}{5040} - \frac{1}{120}(x-\pi)^5 + \frac{1}{6}(x-\pi)^3 - x + \pi$$

$$\text{Polinomio di Taylor=}\left(-\frac{(x-\pi)^9}{362\,880} + \frac{(x-\pi)^7}{5040} - \frac{1}{120}(x-\pi)^5 + \frac{1}{6}(x-\pi)^3 - x + \pi\right)$$

```
Normal[Series[Cos[x], {x, 0, 10}]];
Print["Polinomio di Taylor=" %]
```

$$\text{Polinomio di Taylor=}\left(-\frac{x^{10}}{3\,628\,800} + \frac{x^8}{40\,320} - \frac{x^6}{720} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^2}{2} + 1\right)$$

```
Normal[Series[Log[1 + x], {x, 0, 10}]];
Print["Polinomio di Taylor=" %]
```

$$\text{Polinomio di Taylor=}\left(-\frac{x^{10}}{10} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^8}{8} + \frac{x^7}{7} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x\right)$$

Per valutare il polinomio per un valore determinato della variabile si usa il comando "/.x-> valore"

```
Normal[Series[Exp[x^2], {x, 0, 4}]] /. x → 2
```

13

```
Print[Table[N[E - Normal[Series[Exp[x], {x, 0, k}]] /. x → 1], {k, 1, 10}]]
```

$\{0.718282, 0.218282, 0.0516152, 0.0099485, 0.00161516, 0.000226273, 0.0000278602, 3.05862\times 10^{-6}, 3.02886\times 10^{-7}, 2.73127\times 10^{-8}\}$

```
(1 + 1 / 10) ^10
```

$$\frac{25\,937\,424\,601}{10\,000\,000\,000}$$

Allo stesso modo si puo' definire la funzione taylor delle tre variabili x, centro di sviluppo e grado:

```
taylor[x_, centro_, grado_] := Normal[Series[Exp[t], {t, centro, grado}]] /. t → x
```

Facciamo il disegno della funzione e di alcuni polinomi di Taylor.
La funzione e' disegnata in nero e i vari polinomi di Taylor in rosso.

```
f[x_] := Exp[x];
centro = 0;
Plot[{f[x], taylor[x, centro, 6], taylor[x, centro, 1]}, {x, centro - 6, centro + 6},
 PlotStyle → {RGBColor[0, 0, 0], RGBColor[1, 0, 0], RGBColor[1, 0, 0]},
 PlotLabel → f[x]]
Print[{"I polinomi di Taylor di grado 3 e 6 di" f[x]}]
taylor[x, centro, 1]
taylor[x, centro, 2]
```

{I polinomi di Taylor di grado 3 e 6 di e^x}

$x + 1$

$$\frac{x^2}{2} + x + 1$$

```
f[x_] := Exp[x]
taylor[x_, centro_, grado_] := Normal[Series[f[t], {t, centro, grado}]] /. t → x
Manipulate[centro = 0;
 Plot[{Exp[x], taylor[x, centro, n]}, {x, centro - 3, centro + 3},
  PlotStyle → {RGBColor[0, 0, 0], RGBColor[1, 0, 0]},
  PlotRange → {-1, 10}, PlotLabel → taylor[x, centro, n]], {n, 1, 10, 1}]
```

```
 Clear[f, taylor, centro, grado]
f[x_] := Log[1 + x]
taylor[x_, centro_, grado_] := Normal[Series[f[t], {t, centro, grado}]] /. t → x
Manipulate[centro = 0;
 Plot[{f[x], taylor[x, centro, n]}, {x, centro - 2, centro + 5},
  PlotStyle → {RGBColor[0, 0, 0], RGBColor[1, 0, 0]},
  PlotRange → {-3, 3}, PlotLabel → taylor[x, centro, n]], {n, 1, 10, 1}]
```

```
 Clear[f, taylor, centro, grado]
f[x_] := Sin[x]
taylor[x_, centro_, grado_] := Normal[Series[f[t], {t, centro, grado}]] /. t → x
Manipulate[centro = 0;
 Plot[{f[x], taylor[x, centro, n]}, {x, centro - 10, centro + 10},
  PlotStyle → {RGBColor[0, 0, 0], RGBColor[1, 0, 0]},
  PlotRange → {-2, 2}, PlotLabel → taylor[x, centro, n]], {n, 1, 21, 1}]
```

```
f[x_] := Sqrt[1 + x]
taylor[x_, centro_, grado_] := Normal[Series[f[t], {t, centro, grado}]] /. t → x
Manipulate[centro = 0;
 Plot[{f[x], taylor[x, centro, n]}, {x, centro - 1, centro + 3},
  PlotStyle → {RGBColor[0, 0, 0], RGBColor[1, 0, 0]},
  PlotRange → {-2, 2}, PlotLabel → taylor[x, centro, n]], {n, 1, 11, 1}]
```

```
N[ArcTan[1 / 2] - Pi / 6]
```

−0.0599512

```
Clear[f]
f[x_] := Log[x];
grado = 15;
centro = 1;
taylor[x_, centro_, grado_] := Normal[Series[f[t], {t, centro, grado}]] /. t → x
Normal[Series[f[t], {t, centro, grado}]]
Plot[{f[x], taylor[x, centro, grado]}, {x, 0, 7},
 PlotStyle → {RGBColor[0, 0, 0], RGBColor[1, 0, 0]}, PlotRange → {-1.5, 1.5}]
```

```
Clear[f]
f[x_] := Exp[x];
centro = 0;
gradomassimo = 5;
taylor[x_, centro_, grado_] := Normal[Series[f[t], {t, centro, grado}]] /. t → x
Do[
 Plot[{f[x], taylor[x, centro, grado]}, {x, -10, 5},
  PlotLabel -> "Polinomio di Taylor",
  PlotStyle → {RGBColor[0, 0, 0], RGBColor[1, 0, 0]},
  PlotRange → {-2, 10} ], {grado, gradomassimo}]
```

```
Clear[f, taylor]
f[x_] := Log[1 + x];
n := 40
taylor[t_, n] := Normal[Series[f[x], {x, 0, n}]] /. {x → t}
Plot[{f[t], taylor[t, n]}, {t, -1, 6},
 PlotStyle → {RGBColor[0, 0, 0], RGBColor[1, 0, 0]}, PlotRange → {-5, 5}]
```

```
Clear[f]
f[x_] := Exp[x];
centro = 2;
grado = 3;
taylor[x_, centro_, grado_] := Normal[Series[f[t], {t, centro, grado}]] /. t → x
Plot[{f[x], taylor[x, centro, grado]}, {x, -2, 5},
 PlotLabel -> "Polinomio di Taylor",
 PlotStyle → {RGBColor[0, 0, 0], RGBColor[1, 0, 0]} ]
```

```
Clear[f]
f[x_] := ArcTan[x];
centro = 0;
grado = 10;
taylor[x_, centro_, grado_] := Normal[Series[f[t], {t, centro, grado}]] /. t → x
Plot[{f[x], taylor[x, centro, grado]}, {x, -5, 5},
 PlotLabel -> "Polinomio di Taylor",
 PlotStyle → {RGBColor[0, 0, 0], RGBColor[1, 0, 0]}, PlotRange → {-2, 2} ]
```

```
Clear[f]
f[x_] := Sin[x];
centro = 0;
grado = 21;
taylor[x_, centro_, grado_] := Normal[Series[f[t], {t, centro, grado}]] /. t → x
Plot[{f[x], taylor[x, centro, grado]}, {x, -10, 10},
 PlotLabel -> "Polinomio di Taylor",
 PlotStyle → {RGBColor[0, 0, 0], RGBColor[1, 0, 0]}, PlotRange → {-1.1, 1.1} ]
```