Integrale secondo Riemann
Definizione

Raul Paolo Serapioni

Analisi Matematica 1
Analisi Matematica A – Primo modulo
Corsi di Laurea in Fisica e Matematica
Università di Trento

novembre 2019

Integrale elementare "secondo Cauchy"

1. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua.
2. Dividiamo $[a, b]$ in N parti uguali mediante i punti $x_i := a + i\frac{b-a}{N}$.

$$x_0 := a; \quad x_1 := a + \frac{b-a}{N}; \quad x_2 := a + 2\frac{b-a}{N}; \ldots x_N := b.$$

3. Definiamo:

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{N \to +\infty} \sum_{i=1}^{N} f(x_{i-1})\frac{b-a}{N}.$$

Osservazioni

- Nelle ipotesi indicate il limite esiste (è un teorema).
- Il limite esiste, ed ha lo stesso valore, anche per le seguenti somme:

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{N \to +\infty} \sum_{i=1}^{N} f(x_i) \frac{b-a}{N}$$

oppure

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{N \to +\infty} \sum_{i=1}^{N} f(c_i) \frac{b-a}{N},$$

per una qualsiasi scelta di c_i purché $x_{i-1} \leq c_i \leq x_i$.

Osservazione

La definizione precedente potrebbe essere estesa, ma con alcune difficoltà, al caso di funzioni discontinue.
Si preferisce quindi una definizione lievemente più generale.

Definizione di partizione

Sia $[a, b]$ un intervallo. Una famiglia finita $\mathcal{D}$ di punti di $[a, b]$, tali che

$$\mathcal{D} := \{x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_N = b\},$$

si dice suddivisione o partizione di $[a, b]$.

- Si dice ampiezza di $\mathcal{D}$ il numero $|\mathcal{D}|$

$$|\mathcal{D}| := \max_{1 \leq i \leq n} \{(x_i - x_{i-1})\}.$$

- Si dice che $\mathcal{D}_1$ è più fine di $\mathcal{D}_2$ se $\mathcal{D}_1$ e $\mathcal{D}_2$ sono partizioni di $[a, b]$ e $\mathcal{D}_2 \subset \mathcal{D}_1$.

Vedi: Definizione 1.1, pag 392 e Definizione 1.3, pag 396

Definizione

Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione limitata.

Per ogni partizione $\mathcal{D}$, la somma superiore $S(\mathcal{D}, f)$ e la somma inferiore $s(\mathcal{D}, f)$ di f sono

$$s(\mathcal{D}, f) := \sum_{i=1}^{N} \inf_{(x_{i-1}, x_i)} f(x)\,(x_i - x_{i-1})$$

$$S(\mathcal{D}, f) := \sum_{i=1}^{N} \sup_{(x_{i-1}, x_i)} f(x)\,(x_i - x_{i-1}).$$

Vedi Definizione 1.1, pag 392

Proposizione

Se $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ è una funzione limitata e se $\mathcal{D}_1$ e $\mathcal{D}_2$ sono due partizioni di $[a, b]$ allora :

$$s(\mathcal{D}_1, f) \leq S(\mathcal{D}_2, f),$$

e quindi

$$\sup_{\mathcal{D}} s(\mathcal{D}, f) \leq \inf_{\mathcal{D}} S(\mathcal{D}, f).$$

Vedi: Lemma 1.1 e Corollario 1.2. pag 393

Traccia di prova:

1. Chiaramente $s(\mathcal{D}, f) \leq S(\mathcal{D}, f)$;
2. se $\mathcal{D}_2$ è più fine di $\mathcal{D}_1$ allora
$$s(\mathcal{D}_1, f) \leq s(\mathcal{D}_2, f) \quad \text{e} \quad S(\mathcal{D}_2, f) \leq S(\mathcal{D}_1, f);$$
3. per qualsiasi coppia $\mathcal{D}_1$ e $\mathcal{D}_2$, la partizione $\mathcal{D} := \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$ è più fine di $\mathcal{D}_1$ e $\mathcal{D}_2$ e quindi
$$s(\mathcal{D}_1, f) \leq s(\mathcal{D}, f) \leq S(\mathcal{D}, f) \leq S(\mathcal{D}_2, f).$$

$\square$

Definizione di integrale secondo Riemann

Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ limitata.
f si dice integrabile secondo Riemann (o Riemann integrabile) in $[a, b]$ se

$$\sup_{\mathcal{D}} s(\mathcal{D}, f) = \inf_{\mathcal{D}} S(\mathcal{D}, f)$$

e si dice integrale secondo Riemann di f in (a, b), il numero

$$\int_{(a,b)} f(x)dx := \sup_{\mathcal{D}} s(\mathcal{D}, f) = \inf_{\mathcal{D}} S(\mathcal{D}, f).$$

Indichiamo con $\mathcal{R}(a, b)$ l'insieme delle funzioni Riemann integrabili su (a, b).

Vedi: Definizione 1.2 pag 394

Example (Integrale di una funzione costante)

Se $f(x) = c$, costante, per ogni $x \in (a, b)$, allora

$$\int_{(a,b)} c\, dx = c(b - a).$$

Vedi: Esempio 1.1, par 394

Example (Integrale di $f(x) = x$)

Se $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ è definita da $f(x) = x$ per $x \in (a, b)$ allora

$$\int_{(a,b)} x \, dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}.$$

Example

Esistono funzioni Riemann integrabili con infiniti punti di discontinuità

Se $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}$ è definita da

$$\phi(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} & \text{se } x := \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, \quad p, q \text{ primi fra loro.} \end{cases}$$

allora

- ϕ è Riemann integrabile in $[0,1]$ e
- $$\int_{(0,1)} \phi(x)\, dx = 0.$$

Example (Esistono funzioni limitate non Riemann integrabili)

La "funzione di Dirichlet" $d : (0,1) \to \mathbb{R}$ definita da

$$d(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } x \in (0,1) \cap \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in (0,1) \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

è limitata ma non Riemann integrabile. Infatti

$$\sup_{\mathcal{D}} s(\mathcal{D}, d) = 0 < \inf_{\mathcal{D}} S(\mathcal{D}, d) = 1.$$

Vedi: Esempio 1.2, pag. 394

Teorema

Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ limitata. Allora sono equivalenti:

1. f è Riemann integrabile in (a, b),
2. $\forall \varepsilon > 0$ esiste una suddivisione $\mathcal{D}_\varepsilon$:
$$S(\mathcal{D}_\varepsilon, f) - s(\mathcal{D}_\varepsilon, f) < \varepsilon.$$
3. esiste $\mathcal{I} \in \mathbb{R}$ tale che $\forall \varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che:
$$|\mathcal{D}| < \delta \implies |\sigma(\mathcal{D}, f) - \mathcal{I}| < \varepsilon.$$

Vedi: Teorema 1.3, pag. 395 e Teorema 1.4, pag. 396.

Definizione

Sia $f \in \mathcal{R}(a, b)$ e supponiamo che $f(x) \geq 0$ in (a, b).

Definiamo l'area del sottografico di f come

$$\text{Area del sottografico di } f := \int_{(a,b)} f(x)\, dx.$$

Teorema

Se $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ è continua in $[a, b]$ allora f è Riemann integrabile in (a, b).

Vedi: Teorema 1.5, pag 398

Teorema

Se $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ è monotona e limitata allora f è Riemann integrabile in (a, b).

Vedi: Teorema 1.6, pag 399

Traccia di prova

- Supponiamo f sia crescente in $[a, b]$ e sia $\mathcal{D} := \{x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_N = b\}$ una partizione di $[a, b]$. Allora:

$$s(\mathcal{D}, f) = \sum_{i=1}^{i=N} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})$$

$$S(\mathcal{D}, f) = \sum_{i=1}^{i=N} f(x_i)(x_i - x_{i-1}).$$

- Fissato $\varepsilon > 0$ scegliamo una partizione $\mathcal{D}$ tale che $|\mathcal{D}| < \varepsilon$. Allora

$$
\begin{aligned}
0 \leq S(\mathcal{D}, f) - s(\mathcal{D}, f) &= \sum_{i=1}^{i=N} (f(x_i) - f(x_{i-1}))(x_i - x_{i-1}) \\
&\leq \varepsilon \sum_{i=1}^{i=N} (f(x_i) - f(x_{i-1})) \\
&= \varepsilon (f(b) - f(a))
\end{aligned}
$$

$\square$

Teorema

Se $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ è limitata e ha solo un numero finito di punti di discontinuità in (a, b) allora f è Riemann integrabile in (a, b).

Vedi: Proposizione 1.7, pag 399