

Proprietà dell'Integrale

Raul Paolo Serapioni

Analisi Matematica 1
Analisi Matematica A – Primo modulo
Corsi di Laurea in Fisica e Matematica
Università di Trento

novembre 2019



Proposizione

Siano I un intervallo limitato e $J \subset I$ un sottointervallo di I .

Se $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ è Riemann integrabile in I allora f è Riemann integrabile in J .



Teorema di additività rispetto all'intervallo di integrazione (1)

Sia $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, Riemann integrabile in (a, b) e sia $c \in (a, b)$. Allora:

1 f è Riemann integrabile in (a, c) e in (c, b)

2

$$\int_{(a,b)} f(x)dx = \int_{(a,c)} f(x)dx + \int_{(c,b)} f(x)dx.$$



Teorema: linearità dell'integrale

Siano $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann integrabili in (a, b) . Allora

- per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha f + \beta g$ è Riemann integrabile in (a, b)
-

$$\int_{(a,b)} (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_{(a,b)} f(x) dx + \beta \int_{(a,b)} g(x) dx.$$

Quindi l'insieme $\mathcal{R}(a, b)$ è uno spazio vettoriale.



Teorema: monotonia dell'integrale

Siano $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, Riemann integrabili in (a, b) .

Se $f(x) \leq g(x)$ in (a, b) allora

$$\int_{(a,b)} f(x)dx \leq \int_{(a,b)} g(x)dx.$$



Corollario

Sia $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, Riemann integrabile in (a, b) . Allora

- se $f(x) \geq 0$ in (a, b) allora $\int_{(a,b)} f(x) dx \geq 0$
- se $f(x) \leq 0$ in (a, b) allora $\int_{(a,b)} f(x) dx \leq 0$.



Corollario

Sia $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann integrabile in (a, b) .

Se $m = \inf_{(a,b)} f(x)$ e $M = \sup_{(a,b)} f(x)$ allora

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_{(a,b)} f(x) dx \leq M.$$

Si definisce **media integrale** di f in (a, b) la quantità

$$\frac{1}{b-a} \int_{(a,b)} f(x) dx.$$

