Teoremi fondamentali del Calcolo Integrale

Raul Paolo Serapioni

Analisi Matematica 1
Analisi Matematica A – Primo modulo
Corsi di Laurea in Fisica e Matematica
Università di Trento

dicembre 2019

MEMO

Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ Riemann integrabile in (a, b).

Se $m = \inf_{(a,b)} f(x)$ e $M = \sup_{(a,b)} f(x)$ allora

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_{(a,b)} f(x)dx \leq M.$$

Si definisce media integrale di f in (a, b) la quantità

$$\frac{1}{b-a} \int_{(a,b)} f(x)dx.$$

Teorema della media integrale

Sia $f \in \mathcal{C}([a,b])$.

Allora esiste $c \in (a,b)$ tale che

$$\int_{(a,b)} f(x)\,dx = f(c)\,(b-a)$$

oppure

$$\frac{1}{b-a}\int_{(a,b)} f(x)\,dx = f(c).$$

Teorema

Siano $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$, Riemann integrabili in (a, b). Allora

1. la parte positiva f_+ e la parte negativa f_- sono Riemann integrabili in $[a, b]$;
2. $|f|$ è Riemann integrabile in $[a, b]$ e

$$\left| \int_{(a,b)} f(x)dx \right| \leq \int_{(a,b)} |f(x)|dx$$

Definizione di integrale orientato

Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ Riemann integrabile in (a, b).

La seguente notazione è molto usata:

$$\int_a^b f(x)dx := \int_{(a,b)} f(x)dx;$$

$$\int_b^a f(x)dx := -\int_{(a,b)} f(x)dx.$$

Utilizzando la nozione di integrale orientato vale la seguente forma generale di additività sull'intervallo di integrazione.

Teorema di additività sull'intervallo di integrazione

Sia $f : I \to \mathbb{R}$ Riemann integrabile nell'intervallo limitato I.

Siano $a, b, c \in I$, (senza ipotesi sull'ordine reciproco di a, b, c) allora

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Vedi Teorema 1.9, pag. 403

Primo teorema fondamentale del calcolo integrale

Sia $f \in \mathcal{R}(a,b)$ e sia $G : (a,b) \to \mathbb{R}$ una primitiva di f in (a,b). Supponiamo che esistano finiti

$$G(a^+) := \lim_{x \to a^+} G(x) \qquad G(b^-) := \lim_{x \to b^-} G(x).$$

Allora

$$\int_{(a,b)} f(x)\,dx = G(b^-) - G(a^+).$$

Vedi Teorema 1.10, pag. 404

Versione con Integrale orientato

Sia f Riemann integrabile in un intervallo di estremi c e d, senza supporre che $c < d$. Sia G una primitiva nello stesso intervallo, allora

$$\int_c^d f(x)\,dx = G(d) - G(c),$$

Osservazione

A seconda che $c < d$ o $d < c$ abbiamo posto $G(c) := \lim_{x\to c^+} G(x)$ o $G(c) := \lim_{x\to c^-} G(x)$ e analogamente per $G(d)$.

Traccia di prova (vedi Dimostrazione a pag 404):

- Sia $\mathcal{D} := \{x_0 = a < x_1 < \cdots < x_N = b\}$ una partizione di (a, b). Allora

$$G(b^-) - G(a^+) =$$
$$= G(b^-) - G(x_{N-1}) + G(x_{N-1}) - G(x_{N-2}) + \cdots + G(x_1) - G(a^+).$$

- G verifica le ipotesi del Teorema di Lagrange in ogni intervallo (x_{i-1}, x_i). Quindi esistono $c_i \in (x_{i-1}, x_i)$ tali che

$$G(x_{i-1}) - G(x_i) = G'(c_i)(x_i - x_{i-1}) = f(c_i)(x_i - x_{i-1})$$

e quindi

$$G(b^-) - G(a^+) = \sum_{i=1}^{N} f(c_i)(x_i - x_{i-1})$$

- Per la generica partizione $\mathcal{D}$ vale

$$s(\mathcal{D}, f) \leq G(b^-) - G(a^+) \leq S(\mathcal{D}, f)$$

e quindi

$$\sup_{\mathcal{D}} s(\mathcal{D}, f) \leq G(b^-) - G(a^+) \leq \inf_{\mathcal{D}} S(\mathcal{D}, f)$$

- Poichè f è Riemann integrabile

$$\sup_{\mathcal{D}} s(\mathcal{D}, f) = \inf_{\mathcal{D}} S(\mathcal{D}, f) = \int_{(a,b)} f(x)dx = G(b^-) - G(a^+).$$

Definizione

Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ Riemann integrabile in (a, b) e sia $x_0 \in (a, b)$. Allora:

- f è Riemann integrabile sull'intervallo di estremi x e x_0, per ogni $x \in (a, b)$.
- Definiamo la funzione integrale $F = F_{x_0} : (a, b) \to \mathbb{R}$ come

$$F(x) := \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt.$$

Vedi definizione a pag 406.

Secondo teorema fondamentale del calcolo integrale

Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ Riemann integrabile in (a,b) e sia $x_0 \in (a,b)$. Allora

1. La funzione integrale F_{x_0} è continua in $[a,b]$.
2. La funzione integrale F_{x_0} è derivabile nei punti di continuità di f e se x è un punto di continuità di f allora
$$F'_{x_0}(x) = f(x).$$
3. Se $f \in \mathcal{C}((a,b))$ allora ogni funzione integrale F di f è una primitiva di f in (a,b).

Vedi Teorema 1.11 a pag 406

Traccia di dimostrazione: (vedi dimostrazione a pag 407)

- Per ogni $x, y \in (a, b)$:

$$F(x) - F(y) = \int_y^x f(t)dt.$$

Supponiamo, per esempio, $x < y$ allora

$$|F(x) - F(y)| \leq \int_{(x,y)} |f(t)|dt \leq |x - y| \sup_{t \in (a,b)} |f(t)|,$$

quindi: $\lim_{y \to x} F(y) = F(x)$.

- Se $x, x+h \in (a,b)$ allora $F(x+h) - F(x) = \displaystyle\int_x^{x+h} f(t)dt$.
  Supponiamo, per esempio, $h > 0$ allora:

$$h \inf_{t \in (x,x+h)} f(t) \leq \int_x^{x+h} f(t)dt \leq h \sup_{t \in (x,x+h)} f(t).$$

Quindi: $\displaystyle\inf_{t \in (x,x+h)} f(t) \leq \frac{1}{h}(F(x+h) - F(x)) \leq \sup_{t \in (x,x+h)} f(t).$

Poiché: $\displaystyle\lim_{h \to 0} \left(\inf_{t \in (x,x+h)} f(t) \right) = \lim_{h \to 0} \left(\sup_{t \in (x,x+h)} f(t) \right) = f(x)$

$$F'(x) := \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(F(x+h) - F(x)) = f(x).$$

- Se $f \in \mathcal{C}((a,b))$ allora ogni funzione integrale F è derivabile in ogni $x \in (a,b)$ e

$$F'(x) = f(x)$$

per ogni $x \in (a,b)$. Quindi F è una primitiva di f in (a,b).

$\square$

Definizione

Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$.
L'insieme di tutte le primitive di una funzione f prende il nome di integrale indefinito di f.
L'integrale indefinito si indica spesso con il simbolo

$$\int f(x)dx.$$

Osservazione

Ambiguità nella notazione: $\int f(x)dx$ indica sia una specifica primitiva che l'insieme di tutte le primitive.