Integrali
Calcolo di primitive

Raul Paolo Serapioni

Analisi Matematica 1
Analisi Matematica A – Primo modulo
Corsi di Laurea in Fisica e Matematica
Università di Trento

novembre 2019

MEMO

L'insieme di tutte le primitive di una funzione f prende il nome di integrale indefinito di f e si indica spesso con il simbolo

$$\int f(x)dx.$$

$\ldots$ $\ldots$

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \arctan x \qquad \int \frac{1}{x-\alpha}\,dx = \log|x-\alpha|$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x \qquad \int \frac{1}{(x-\alpha)^n}\,dx = \frac{1}{(1-n)}\frac{1}{(x-\alpha)^{n-1}}$$

$\ldots$ $\ldots$

Linearità

$$\int \alpha f(x) + \beta g(x)\, dx = \alpha \int f(x)\, dx + \beta \int g(x)\, dx$$

Example

$$\int (\alpha_0 x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \cdots + \alpha_n)\, dx = \frac{\alpha_0}{n+1} x^{n+1} + \cdots + \alpha_n x + c$$

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$$

e quindi

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$$

Example

$$\int x\cos x\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x$$

Example

$$\begin{aligned}\int x^2 e^x\,dx &= x^2 e^x - \int 2x\,e^x\,dx\\ &= x^2 e^x - \left(2x\,e^x - \int 2e^x\,dx\right)\\ &= x^2 e^x - 2x\,e^x + 2e^x\end{aligned}$$

Example

$$\int \log x\,dx = \int 1\cdot\log x\,dx = x\log x - \int dx = x\log x - x$$

Example

$$\begin{aligned}
\int \sin^2 x \, dx &= -\sin x \cos x + \int \cos^2 x \, dx \\
&= -\sin x \cos x + x - \int \sin^2 x \, dx \\
&= \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x)
\end{aligned}$$

Siano $f \in \mathcal{C}([a,b])$, $\varphi \in \mathcal{C}^1(I)$ dove I è un intervallo tale che $\varphi(I) \subset [a,b]$, allora:

$$\int f(t)\,dt\,\big|_{t=\varphi(x)} = \int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx.$$

Formula del cambiamento di variabile

Siano $f \in \mathcal{C}([a,b])$, $\varphi \in \mathcal{C}^1(I)$ dove I è un intervallo tale che $\varphi(I) \subset [a,b]$.

Allora, per ogni $\alpha, \beta \in I$:

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\, dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(x))\, \varphi'(x)\, dx$$

Example

Se $\phi \in C^1(I)$

$$\int \frac{\phi'(x)}{\phi(x)}\, dx = \log|\phi(x)|$$

Example

$$\int \frac{x}{x^2+\alpha^2}\, dx = \frac{1}{2}\log(x^2+\alpha^2)$$

Example

$$\int \frac{1}{x^2+\alpha^2}\, dx = \frac{1}{\alpha^2}\int \frac{1}{(x/\alpha)^2+1}\, dx = \frac{1}{\alpha}\arctan\frac{x}{\alpha}$$

Example

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1+2e^x}{e^{2x}+1}\,dx &= \int \frac{1+2e^x}{(e^{2x}+1)e^x}\,e^x\,dx \\
&= \int \frac{1+2t}{(t^2+1)t}\,dt \\
&= \int \left(\frac{1}{t}+\frac{2}{t^2+1}-\frac{t}{t^2+1}\right)\,dt \\
&= \log|t| + 2\arctan(t) - \frac{1}{2}\log(t^2+1)
\end{aligned}
$$

Example (Cambiamenti di scala)

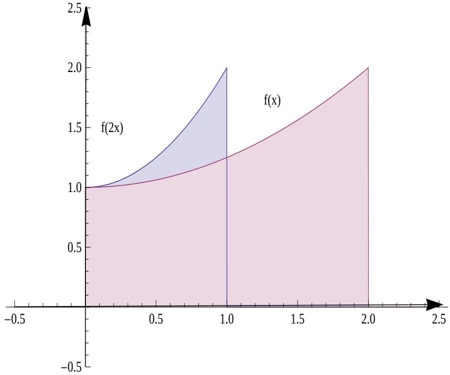
Sia $\lambda > 0$ e sia $f : (\lambda a, \lambda b) \to \mathbb{R}$ Riemann integrabile. Sia

$$\begin{cases} f_\lambda : (a, b) \to \mathbb{R} \\ f_\lambda(x) := f(\lambda x) \end{cases}$$

allora: f_λ è Riemann integrabile in (a, b) e

$$\int_{(a,b)} f(\lambda x)\, dx = \frac{1}{\lambda} \int_{(\lambda a, \lambda b)} f(x)\, dx.$$

Cambiamenti di scala



$$\frac{1}{2}\int_{(0,2)} f(x)\,dx = \int_{(0,1)} f(2x)\,dx.$$

Example (Invarianza per traslazione)

Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ Riemann integrabile in (a, b). Sia f_τ la funzione *traslata*:

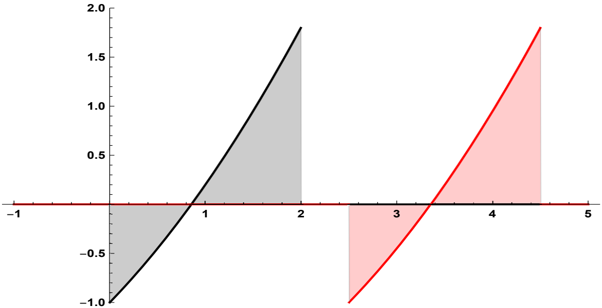
$$\begin{cases} f_\tau : (a-\tau, b-\tau) \to \mathbb{R} \\ f_\tau(x) := f(x+\tau) \end{cases}$$

Allora, per ogni $\tau \in \mathbb{R}$:

f_τ è Riemann integrabile in $(a-\tau, b-\tau)$ e

$$\int_{(a,b)} f(x)dx = \int_{(a-\tau,b-\tau)} f(x+\tau)dx = \int_{(a-\tau,b-\tau)} f_\tau(x)dx.$$

Invarianza per traslazione



$$\int_{(0,2)} f(x)dx = \int_{(2.5,4.5)} f(x-2.5)dx$$

Example (Invarianza per riflessione)

Se $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ è Riemann integrabile in (a,b). Sia $f_s : (-b,-a)$ la funzione simmetrica:

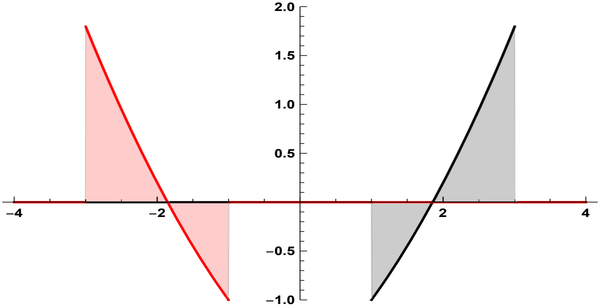
$$\begin{cases} f_s : (-b,-a) \to \mathbb{R} \\ f_s(x) := f(-x) \end{cases}$$

allora:

f_s è Riemann integrabile in $(-b,-a)$ e

$$\int_{(a,b)} f(x)dx = \int_{(-b,-a)} f(-x)dx = \int_{(-b,-a)} f_s(x)dx.$$

Invarianza per riflessione



$$\int_{(-3,-1)} f(x)dx = \int_{(1,3)} f(-x)dx$$

Example (Simmetrie)

- Se $f : (-a, a) \to \mathbb{R}$ è *dispari* e Riemann integrabile allora
$$\int_{(-a,a)} f(x)dx = 0.$$
- Se $g : (-a, a) \to \mathbb{R}$ è *pari* e Riemann integrabile allora
$$\int_{(-a,a)} g(x)dx = 2\int_{(0,a)} g(x)dx.$$

Ogni funzione razionale si può scrivere come somma di funzioni razionali "semplici".

Example

$$\int \frac{x^3+3x^2+1}{x^2+1}\,dx = \int \left(x+3-\frac{x+2}{x^2+1}\right)\,dx$$
$$= \frac{1}{2}x^2+3x-\int \frac{x}{x^2+1}\,dx - \int \frac{2}{x^2+1}\,dx$$
$$= \frac{1}{2}x^2+3x-\frac{1}{2}\log(x^2+1)-2\arctan x$$

Example

$$
\begin{aligned}
\int \frac{2x+3}{x^2+4x+8}\,dx \\
&= \int \left(\frac{2x+4}{x^2+4x+8} - \frac{1}{x^2+4x+8} \right) dx \\
&= \log(x^2+4x+8) - \frac{1}{4} \int \frac{1}{(x/2+1)^2+1}\,dx \\
&= \log(x^2+4x+8) - \frac{1}{2} \arctan(x/2+1)
\end{aligned}
$$

Example

$$\int \frac{3x+3}{(x-1)(x+2)}\,dx = \int \left(\frac{2}{x-1} + \frac{1}{x+2}\right)\,dx$$
$$= 2\log|x-1| + \log|x+2|$$

La formula di Taylor con resto in forma integrale

Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, $(n+1)$-volte derivabile in (a, b).
Sia $f^{(n+1)}$ Riemann integrabile in (a, b). Allora

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0) \cdot (x - x_0)^k + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t) \cdot (x - t)^n \, dt.$$

per ogni $x_0, x \in (a, b)$.

Traccia di prova:

$$
\begin{aligned}
f(x) - f(x_0) &= \int_{x_0}^{x} f'(t)dt, \qquad \text{e poichè } \frac{d}{dt}(x-t) = -1 \\
&= -\int_{x_0}^{x} \frac{d}{dt}(x-t)\, f'(t)dt, \qquad \text{e integrando per parti} \\
&= -(x-t)\, f'(t)\big|_{x_0}^{x} + \int_{x_0}^{x} (x-t)\, f''(t)dt \\
&= (x-x_0)\, f'(x_0) + \int_{x_0}^{x} (x-t)\, f''(t)dt.
\end{aligned}
$$

Osservando che

$$(x-t) = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(x-t)^2;$$

con una ulteriore integrazione per parti si ottiene

$$f(x) - f(x_0) = (x-x_0)\, f'(x_0) + \frac{1}{2}(x-x_0)^2 + \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}(x-t)^2\, f^{(3)}(t)dt.$$

Si prosegue osservando che

$$(x-t)^2 = -\frac{1}{3}\frac{d}{dt}(x-t)^3$$

e integrando ancora per parti. . . $\square$

Example

La funzione $x \mapsto e^x$ è infinitamente derivabile in $\mathbb{R}$.

La formula di Taylor, con resto integrale e con $x_0 = 0$, è

$$
\begin{aligned}
e^x &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \left(D^{(k)} e^x \right) |_{x=0} \cdot x^k + \frac{1}{n!} \int_0^x \left(D^{(n+1)} e^t \right) \cdot (x-t)^n \, dt \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot x^k + \frac{1}{n!} \int_0^x e^t \cdot (x-t)^n \, dt.
\end{aligned}
$$

per qualsiasi $n \in \mathbb{N}$.