Integrali
Applicazioni

Raul Paolo Serapioni

Analisi Matematica 1
Analisi Matematica A – Primo modulo
Corsi di Laurea in Fisica e Matematica
Università di Trento

dicembre 2019

Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, $(n+1)$-volte derivabile in (a,b).
Sia $f^{(n+1)}$ Riemann integrabile in (a,b). Allora

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0) \cdot (x - x_0)^k + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t) \cdot (x-t)^n \, dt.$$

per ogni $x_0, x \in (a,b)$.

Traccia di prova:

$$
\begin{aligned}
f(x) - f(x_0) &= \int_{x_0}^{x} f'(t)dt, \qquad \text{e poichè } \frac{d}{dt}(x-t) = -1 \\
&= -\int_{x_0}^{x} \frac{d}{dt}(x-t)\, f'(t)dt, \qquad \text{e integrando per parti} \\
&= -(x-t)\, f'(t)|_{x_0}^{x} + \int_{x_0}^{x} (x-t)\, f''(t)dt \\
&= (x-x_0)\, f'(x_0) + \int_{x_0}^{x} (x-t)\, f''(t)dt.
\end{aligned}
$$

Osservando che

$$(x-t) = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(x-t)^2;$$

con una ulteriore integrazione per parti si ottiene

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)\, f'(x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^2 + \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} (x-t)^2\, f^{(3)}(t)dt.$$

Si prosegue osservando che

$$(x-t)^2 = -\frac{1}{3}\frac{d}{dt}(x-t)^3$$

e integrando ancora per parti... $\square$

Example

La funzione $x \mapsto e^x$ è infinitamente derivabile in $\mathbb{R}$.

La formula di Taylor, con resto integrale e con $x_0 = 0$, è

$$
\begin{aligned}
e^x &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \left(D^{(k)} e^x \right) |_{x=0} \cdot x^k + \frac{1}{n!} \int_0^x \left(D^{(n+1)} e^t \right) \cdot (x-t)^n \, dt \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot x^k + \frac{1}{n!} \int_0^x e^t \cdot (x-t)^n \, dt.
\end{aligned}
$$

per qualsiasi $n \in \mathbb{N}$.

Example

$x \mapsto \log(1+x)$ è infinitamente derivabile per $x > -1$.

La formula di Taylor con resto integrale è

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + \frac{1}{n!} \int_0^x (D^{(n+1)} \log(1+t)) \cdot (x-t)^n dt$$

per ogni $x > -1$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Osserviamo che:

1. La serie
$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}$$
converge per $-1 < x \leq 1$
2. e
$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} = \log(1+x), \qquad \text{per } -1 < x \leq 1.$$

Infatti, per $-1 < x$,

$$\begin{aligned}
&\left|\log(1+x) - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}\right| \\
&= \left|\frac{1}{n!}\int_0^x \left(D^{(n+1)}\log(1+t)\right)\cdot(x-t)^n dt\right| \\
&\leq \frac{1}{n!}\int_0^{|x|}\left|\left(D^{(n+1)}\log(1+t)\right)\cdot(x-t)^n\right| dt
\end{aligned}$$

Osservando che

$$D^{(n+1)} \log(1+t) = (-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{(1+t)^{n+1}}.$$

$$\left| \log(1+x) - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} \right|$$
$$\leq \frac{1}{n} \int_0^{|x|} \frac{|x-t|^n}{(1+t)^{n+1}} dt$$
$$\leq \max(1, \frac{1}{1+x}) \cdot \frac{|x|^{n+1}}{n(n+1)} \to 0$$

per $n \to +\infty$ e per $-1 < x \leq 1$.

Quindi abbiamo provato che

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} := \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} = \log(1+x)$$

per ogni x fissato e tale che $-1 < x \leq 1$.

Teorema

Sia $f : I \to \mathbb{R}$ Riemann integrabile sull'intervallo I e sia $y_0 \in I$. Sia $\gamma : J \to I$ derivabile. Allora

- $\Phi : J \to \mathbb{R}$ definita da
$$x \mapsto \Phi(x) := \int_{y_0}^{\gamma(x)} f(y)dy$$
è derivabile;
-
$$\frac{d}{dx}\left(\int_{y_0}^{\gamma(x)} f(y)dy\right) = f(\gamma(x))\,\gamma'(x).$$

Corollario

Sia $f : I \to \mathbb{R}$ Riemann integrabile sull'intervallo I e siano $\gamma, \beta : J \to I$ derivabili. Allora

- $\Psi : J \to \mathbb{R}$ definita da
$$x \mapsto \Psi(x) := \int_{\beta(x)}^{\gamma(x)} f(y)dy$$
è derivabile;
- $$\frac{d}{dx}\left(\int_{\beta(x)}^{\gamma(x)} f(y)dy\right) = f(\gamma(x))\,\gamma'(x) - f(\beta(x))\,\beta'(x).$$

Teorema

Sia $f(x,y) : [a,b] \times (c,d) \to \mathbb{R}$ continua nel rettangolo $[a,b] \times (c,d)$. Sia $y_0 \in (c,d)$. Allora

$$y \mapsto \int_{(a,b)} f(x,y)dx$$

è una funzione continua in (c,d) e

$$\lim_{y \to y_0} \int_{(a,b)} f(x,y)dx = \int_{(a,b)} \lim_{y \to y_0} f(x,y)dx.$$

Vedi: Proposizione 1.14, pag 414

Teorema

Sia $f(x,y) : [a,b] \times (c,d) \to \mathbb{R}$.
Sia f continua nel rettangolo $[a,b] \times (c,d)$.
Sia inoltre $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ continua nel rettangolo $[a,b] \times (c,d)$.
Allora

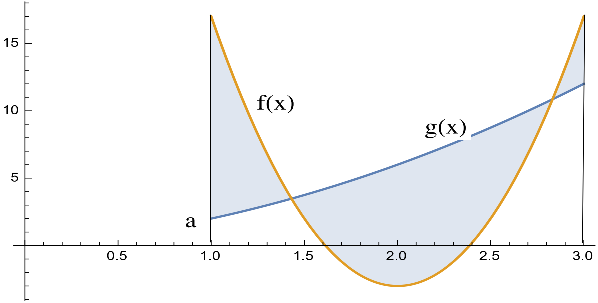
$$y \mapsto \int_{(a,b)} f(x,y)dx$$

è derivabile in (c,d) e

$$\frac{d}{dy}\left(\int_{(a,b)} f(x,y)dx\right) = \int_{(a,b)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx.$$

Vedi: Teorema 1.16, pag 415

Area della regione fra due curve



L'area $\mathcal{A}$ della regione compresa fra i grafici di f e g è

$$\mathcal{A} := \int_{(a,b)} |f(x) - g(x)| dx$$

Volume di un solido.

Sia $E \subset \mathbb{R}^3$ compreso fra i due piani $\Pi_a := \{(a, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\}$ e $\Pi_b := \{(b, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\}$ cioè

$$E \subset \{(x, y, z) : a \leq x \leq b;\ y, z \in \mathbb{R}\}.$$

Per $t \in [a, b]$, $E_t := E \cap \Pi_t$ è la sezione di E con il piano Π_t e $\mathcal{A} : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ la funzione "area della sezione E_t",

$$t \mapsto \mathcal{A}(t) := Area(E_t).$$

Allora, se $\mathcal{A}$ è Riemann integrabile in (a, b), il volume $\mathcal{V}$ di E è

$$\mathcal{V} := \int_{(a,b)} \mathcal{A}(x)\, dx.$$

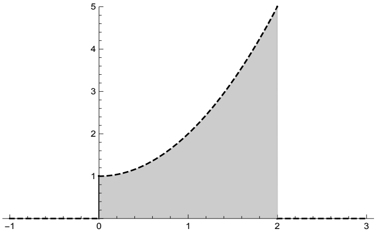
Rotazione attorno all'asse delle ascisse.

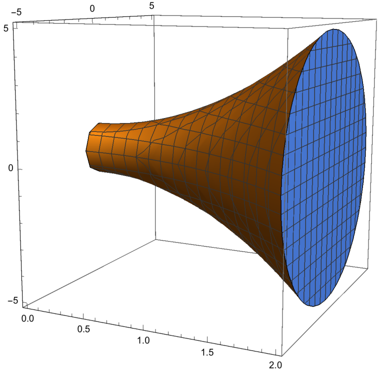
Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a, b]$. Sia $E \subset \mathbb{R}^3$ il solido ottenuto "facendo ruotare attorno all'asse x la regione compresa fra il grafico di f e l'asse delle x":

$$E := \{(x, y, z) : y^2 + z^2 \leq f(x)^2, a \leq x \leq b\}$$

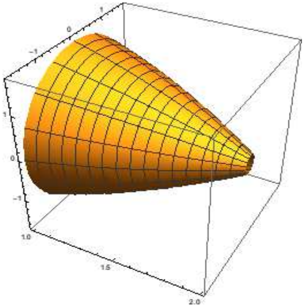
allora il volume $\mathcal{V}$ di E è

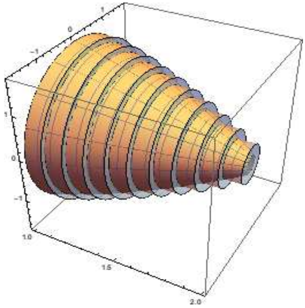
$$\mathcal{V} := \pi \int_{(a,b)} f^2(x)dx$$





E è ottenuto "ruotando" il sottografico di $f(x) := 1 + x^2$.


1
0
-1
1
0
-1
1.0
1.5
2.0


1
0
-1
1
0
-1
1.0
1.5
2.0

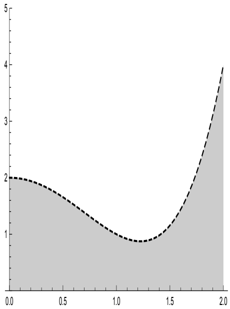
Rotazione attorno all'asse delle ordinate.

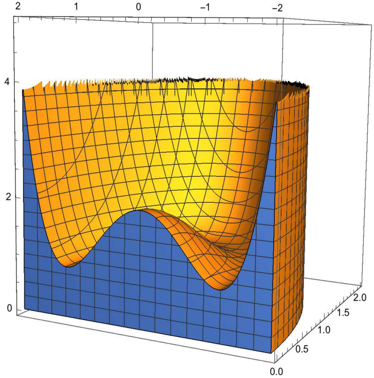
Sia $0 \leq a < b$ e $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua e non negativa in $[a, b]$. Sia $E \subset \mathbb{R}^3$ il solido ottenuto "facendo ruotare attorno all'asse verticale z la regione compresa fra il grafico di f e l'asse delle x":

$$E := \{(x, y, z) : a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2, \quad 0 \leq z \leq f(x)\}$$

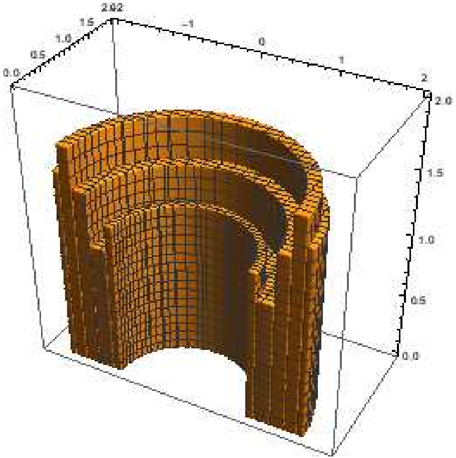
allora il volume $\mathcal{V}$ di E è

$$\mathcal{V} := 2\pi \int_{(a,b)} xf(x)dx$$





E è ottenuto "ruotando" il sottografico di $f(x) := 1 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^4$.
Nel secondo disegno è mostrata una sezione di E.

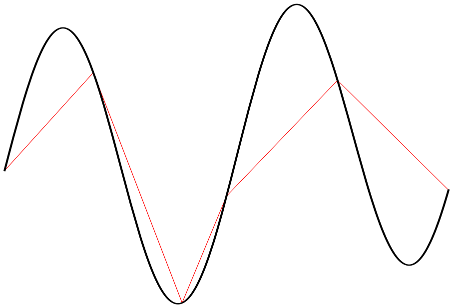


E è approssimato come unione di strati concentrici.

Lunghezza di un grafico.

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ di classe C^1 in $[a, b]$.
Allora la lunghezza ℓ del grafico di f è

$$\ell := \int_{(a,b)} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$



La curva è approssimata da una spezzata.

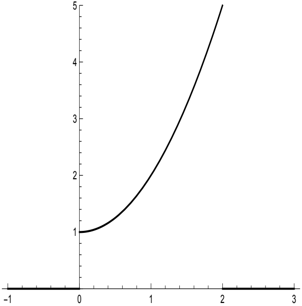
Area di una superficie di rotazione.

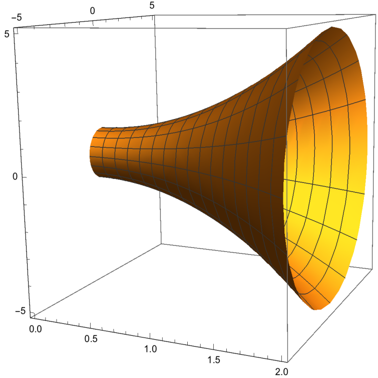
Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ di classe C^1 in $[a, b]$.
Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ la superficie ottenuta "ruotando attorno all'asse x" il grafico di f

$$S := \{(x, y, z) : y^2 + z^2 = f(x)^2, a \leq x \leq b\}$$

Allora l'area $\mathcal{S}$ di S è

$$\mathcal{S} := 2\pi \int_{(a,b)} f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$





S è ottenuto "ruotando" il grafico di $f(x) := 1 - x^2$.