Integrali impropri
Serie numeriche

Raul Paolo Serapioni

Analisi Matematica 1
Analisi Matematica A – Primo modulo
Corsi di Laurea in Fisica e Matematica
Università di Trento

dicembre 2019

Cap 8 par 3.1, 3.2, 3.3 **Funzioni integrali. Integrali generalizzati e serie numeriche**

Definizione

Sia $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ e sia Riemann integrabile in $[a + \delta, b]$ per ogni δ, $0 < \delta < b - a$. Se esiste finito

$$\lim_{\delta \to 0^+} \int_{a+\delta}^{b} f(x)\, dx$$

diciamo che:

f è Riemann integrabile in senso generalizzato in $(a, b]$ e

$$\int_a^b f(x)\, dx := \lim_{\delta \to 0^+} \int_{a+\delta}^{b} f(x)\, dx.$$

Vedi: Definizione 3.1, pag 452 e Definizione 3.2, pag.454

Definizione

Sia $f : (-\infty, b] \to \mathbb{R}$ tale che f sia Riemann integrabile in $[c, b]$ per ogni $c < b$. Se esiste finito

$$\lim_{c \to -\infty} \int_c^b f(x)\, dx$$

diciamo che:

f è Riemann integrabile in senso generalizzato in $(-\infty, b]$ e

$$\int_{-\infty}^b f(x)\, dx := \lim_{c \to -\infty} \int_c^b f(x)\, dx.$$

Vedi: Definizione 3.1, pag 452 e Definizione 3.2, pag.454

- Analogamente se $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ oppure $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$.
- Si dice che $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è Riemann integrabile in senso generalizzato in $\mathbb{R}$ se è integrabile in senso generalizzato in $(-\infty, 0]$ e in $[0, +\infty)$ e

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx := \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{+\infty} f(x)\,dx$$

Osservazione

Se $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ è Riemann integrabile in (a, b) allora f è integrabile in senso generalizzato in (a, b).

Example

$$\int_0^1 x^{-\alpha}\,dx := \lim_{a\to 0^+}\int_a^1 x^{-\alpha}\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha} & \text{se } \alpha < 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha \geq 1 \end{cases}$$

Example

$$\int_1^{+\infty} x^{-\alpha}\,dx := \lim_{b\to +\infty}\int_1^b x^{-\alpha}\,dx = \begin{cases} -\dfrac{1}{1-\alpha} & \text{se } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Vedi: Esempi 3.3, 3.4, 3.5

Example

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\, dx = 1$$

Example

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx = \pi$$

Example

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\log x)^\beta}\,dx := \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{1}{x(\log x)^\beta}\,dx$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{(\log 2)^{1-\beta}}{\beta-1} & \text{se } \beta > 1 \\[2ex] +\infty & \text{se } \beta \le 1 \end{cases}$$

Example

La *funzione di Gauss*

$$x \mapsto e^{-x^2}$$

è integrabile in senso generalizzato in $\mathbb{R}$ e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$$

La funzione integrale della funzione di Gauss, normalizzata in modo da avere asintoti orizzontali a ± 1 si denota spesso come *funzione errore*

$$\mathbf{erf}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt$$

Teorema: criterio del confronto

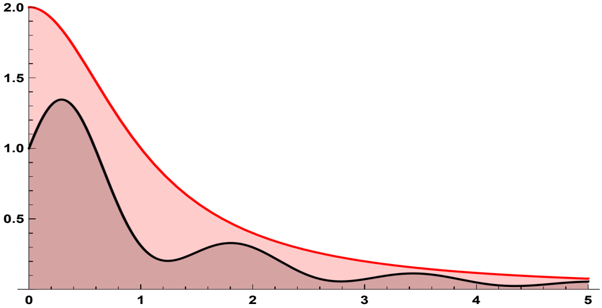
Siano $f, g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ tali che

1. f, g sono integrabili in ogni intervallo limitato $[a, m] \subset [a, +\infty)$,
2. $0 \leq f(x) \leq g(x)$ definitivamente per $x \to +\infty$,

allora:

se g è integrabile in $[a, +\infty)$ anche f è integrabile in $[a, +\infty)$.

Vedi: Teorema 3.1, pag 455


2.0
1.5
1.0
0.5
0
1
2
3
4
5

Corollario: Criterio del confronto asintotico

Siano $f, g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ tali che

1. f, g sono positive in $(a, +\infty)$,
2. f, g sono integrabili in ogni intervallo limitato $[a, m] \subset [a, +\infty)$,
3. $f \sim g$ per $x \to +\infty$

allora:

g è integrabile in $[a, +\infty)$ se e solo se f è integrabile in $[a, +\infty)$.

Vedi: Proposizione 3.2, pag 456

Definizione

I è un intervallo e $f : I \to \mathbb{R}$.
Se $|f|$ è integrabile in senso improprio su I dice che:
f è assolutamente integrabile in senso improprio su I.

Teorema: assoluta convergenza implica convergenza

Sia I un intervallo e $f : I \to \mathbb{R}$.
Sia f Riemann integrabile in ogni sottointervallo limitato $J \subset I$.
Allora

f assolutamente integrabile in $I \implies f$ integrabile in I e

$$\left| \int_I f(x)\, dx \right| \leq \int_I |f(x)|\, dx$$

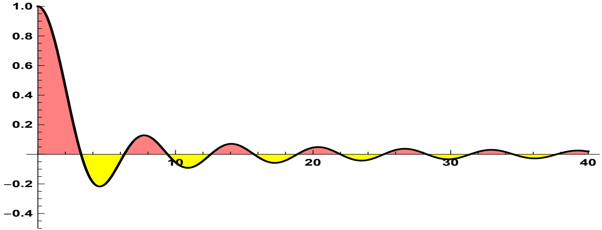
Vedi: Teorema 3.3, pag 458

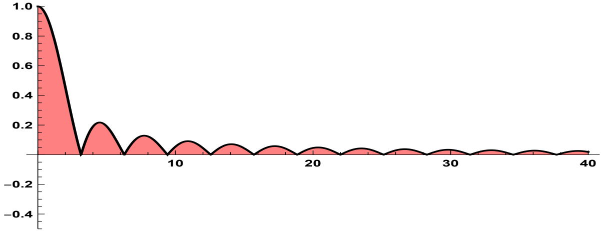
Example

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$$

è convergente ma non assolutamente convergente.

Vedi: Esempio 3.9 pag 458





Vedi: Esempio 3.9 pag 458

Sia a_k una successione e $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ la funzione, costante a tratti, definita da

$$f(x) := a_k \qquad \text{se } x \in [k, k+1).$$

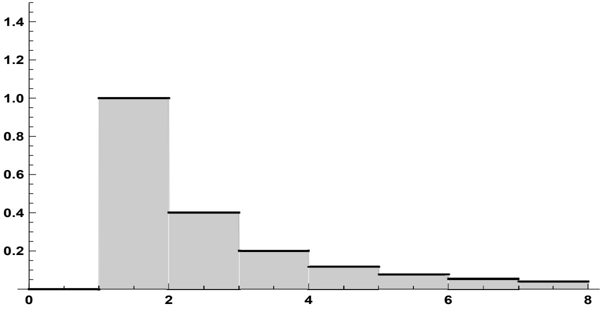
Per definizione

$$\sum_{k=1}^{N} a_k = \int_1^{N+1} f(x)\, dx$$

e sono equivalenti

- $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ è convergente
- f è integrabile in senso generalizzato in $[1, +\infty)$.

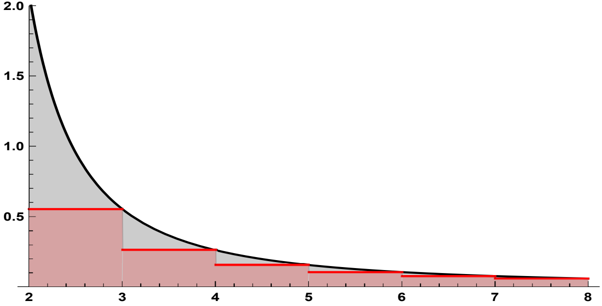
$$S_N := \sum_{k=1}^{N} a_k = \int_1^{N+1} f(x)\,dx.$$



Example

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \log^2 n}$$

è convergente



Example

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \log n}$$

è divergente.