Equazioni differenziali

Raul Paolo Serapioni

Analisi Matematica 1
Analisi Matematica A – Primo modulo
Corsi di Laurea in Fisica e Matematica
Università di Trento

dicembre 2019

Cenno di Definizione

Un'equazione differenziale del primo ordine è del tipo

$$y' = f(t, y).$$

Una funzione $y = y(t) : I \to \mathbb{R}$, derivabile nell'intervallo I, si dice soluzione dell'equazione differenziale in I, se

$$y'(t) = f(t, y(t)), \qquad \text{per ogni } t \in I.$$

Cenno di Definizione

Più in generale, si considerano equazioni differenziali del tipo

$$F(t, y, y') = 0.$$

Una funzione $y = y(t)$, definita e derivabile in un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$, si dice soluzione dell'equazione differenziale in I, se

$$F(t, y(t), y'(t)) = 0, \quad \text{per ogni } t \in I.$$

Definizione: Problema di Cauchy

- Un problema di Cauchy per una equazione differenziale del primo ordine è l'accoppiamento fra una equazione differenziale e una *condizione iniziale*

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = \alpha. \end{cases} \tag{iii}$$

- Una soluzione di (iii) è una funzione derivabile, definita in un intervallo I contenente il punto t_0, e tale che

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & \text{per ogni } t \in I, \\ y(t_0) = \alpha. \end{cases}$$

Cenno di Definizione

Un'equazione differenziale del secondo ordine è del tipo

$$y'' = f(t, y, y') \tag{iv}$$

oppure più in generale del tipo

$$F(t, y, y', y'') = 0.$$

Una funzione $y = y(t) : I \to \mathbb{R}$, due volte derivabile in un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$, è soluzione di una delle equazioni precedenti in I se

$$y''(t) = f(t, y(t), y'(t)), \quad \text{oppure} \quad F(t, y(t), y'(t), y''(t)) = 0 \quad \text{per og}$$

per ogni $t \in I$.

Definizione di Problema di Cauchy

Il problema di Cauchy per una equazione differenziale del secondo ordine è l'accoppiamento fra l'equazione differenziale e due condizioni iniziali che impongono il valore della soluzione e della sua derivata prima in un (unico) punto.

$$\begin{cases} y'' = f(t, y, y') \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1 \,. \end{cases}$$

Un integrale generale di una equazione differenziale

è una formula, costruita a partire da funzioni elementari e da loro funzioni integrali che, al variare di uno o più parametri arbitrari dia *tutte (o quasi tutte)* le soluzioni dell'equazione differenziale.

Attenzione: trovare un integrale generale è un obiettivo, spesso troppo ambizioso.

La famiglia di funzioni $y_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

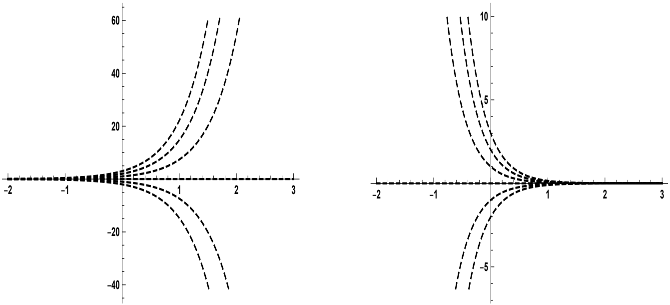
$$t \mapsto y_c(t) := ce^{\lambda t}$$

al variare del parametro $c \in \mathbb{R}$ è un integrale generale dell'equazione del primo ordine

$$y' = \lambda y.$$

Infatti, per ogni fissato $c \in \mathbb{R}$,

$$y_c'(t) = c\lambda e^{\lambda t} = \lambda y_c(t), \qquad \text{per ogni } t \in \mathbb{R}.$$



Parte dei grafici di alcune soluzioni di $y' = \lambda y$, per $\lambda = 2$ e per $\lambda = -3$

La famiglia di funzioni $y_c : (c, +\infty) \to \mathbb{R}$, oppure $y_c : (-\infty, c) \to \mathbb{R}$, definite da

$$t \mapsto y_c(t) := \frac{1}{c-t} \qquad c \in \mathbb{R}$$

è un integrale generale dell'equazione del primo ordine

$$y' = y^2.$$

Infatti, per ogni fissato $c \in \mathbb{R}$,

$$y_c'(t) = \frac{1}{(c-t)^2} = (y_c(t))^2, \qquad \text{per ogni } t \in \mathbb{R} \setminus \{c\}.$$

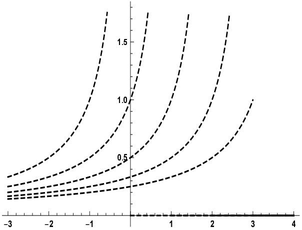
La famiglia

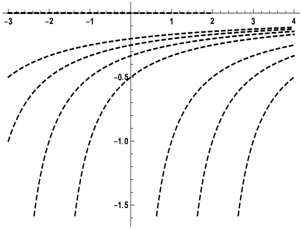
$$t \mapsto \frac{1}{c-t} \qquad c \in \mathbb{R}$$

comprende solo *quasi tutte* le soluzioni dell'equazione, infatti anche la funzione costante

$$t \mapsto y(t) := 0$$

è una soluzione, ma non è esprimibile con l'espressione analitica precedente.





Parte dei grafici di alcune soluzioni di $y' = y^2$. Nei disegni sono funzioni definite su $(-\infty, c)$ oppure su $(c, +\infty)$, per vari valori di c.

Le funzioni $y_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite, al variare del parametro $c \in \mathbb{R}$, da

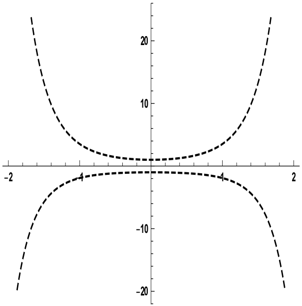
$$x \mapsto y_c(x) := ce^{x^2} + e^{x^2} \int_0^x e^{-s^2} \sin s \, ds$$

è un integrale generale dell'equazione del primo ordine

$$y' = 2xy + \sin x.$$

Infatti

$$\begin{aligned} y_c'(x) &= c2xe^{x^2} + 2xe^{x^2} \int_0^x e^{-s^2} \sin s \, ds + e^{x^2} e^{-x^2} \sin x \\ &= 2x \left(ce^{x^2} + e^{x^2} \int_0^x e^{-s^2} \sin s \, ds \right) + \sin x \\ &= 2xy_c(x) + \sin x. \end{aligned}$$



Parte di due grafici di soluzioni di $y' = 2xy + \sin x$.

La famiglia di funzioni $y_{\alpha,\beta} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite, al variare dei parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, da

$$y_{\alpha,\beta}(x) := \alpha \cos x + \beta \sin x$$

è un integrale generale dell'equazione (del secondo ordine e lineare)

$$y'' + y = 0.$$

Infatti, per ogni $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} y'_{\alpha,\beta}(x) &= -\alpha \sin x + \beta \cos x; \\ y''_{\alpha,\beta}(x) &= -\alpha \cos x - \beta \sin x = -y_{\alpha,\beta}(x). \end{aligned}$$

Definizione

Siano $f : J \to \mathbb{R}$ e $g : I \to \mathbb{R}$ continue e definite in intervalli J e I.

Un'equazioni differenziali del tipo

$$y' = g(t)f(y)$$

si dice equazione differenziale a variabili separabili.

Il relativo problema di Cauchy è

$$\begin{cases} y' = g(t)f(y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

dove $t_0 \in I$ e $y_0 \in J$.

- se $\bar{y} \in \mathbb{R}$ è tale che $f(\bar{y}) = 0$ allora la funzione costante

$$t \mapsto \bar{y}$$

è una soluzione di $y' = g(t)f(y)$;

- se $t \mapsto y(t)$ per $t \in I$ è una soluzione per la quale $f(y(t)) \neq 0$ in I allora

$$y'(t) = f(y(t))g(t) \quad \text{è equivalente a} \quad \frac{y'(t)}{f(y(t))} = g(t)$$

e quindi

$$\int \frac{y'(t)}{f(y(t))}\,dt = \int g(t)\,dt.$$

Per la formula di cambiamento di variabile,

$$\int \frac{1}{f(y)}\, dy_{|y=y(t)} = \int g(t)\, dt.$$

Se si è in grado di calcolare esplicitamente una primitiva di

$$y \mapsto \frac{1}{f(y)}$$

può essere possibile ottenere una espressione esplicita dell'integrale generale.

Osservate che le difficoltà analitiche non sono solo nella ricerca di primitive elementari di $y \mapsto \frac{1}{f(y)}$ ma anche nella ricerca di una funzione inversa per eventualmente esplicitare $t \mapsto y(t)$.

Example

Risolvete il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 2x(y-1) \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

Ricerca dell'integrale generale di $y' = 2x(y-1)$

L'equazione è della forma $y' = f(x)g(y)$.

Poichè $y-1$ si annulla per $y=1$, l'equazione $y' = 2x(y-1)$ ammette la soluzione costante

$$x \mapsto y(x) = 1.$$

Se $x \mapsto y(x)$ è $\neq 1$ allora $y'(x) = 2x(y(x)-1)$ è equivalente a

$$\frac{y'(x)}{y(x)-1} = 2x.$$

Quindi sono uguali anche le rispettive primitive

$$\int \frac{y'(x)}{y(x)-1}\,dx = \int 2x\,dx$$

$$\log|y(x)-1| = x^2 + c \qquad \text{per } c \in \mathbb{R}$$

$$|y(x)-1| = e^{x^2+c} \qquad \text{per } c \in \mathbb{R}$$

e infine

$$\begin{aligned} &\text{se } y(x) > 1: \qquad y(x) = 1 + e^{x^2+c} \quad = 1 + Ke^{x^2}, \\ &\text{se } y(x) < 1: \qquad y(x) = 1 - e^{x^2+c} \quad = 1 - Ke^{x^2}, \end{aligned}$$

con $c \in \mathbb{R}$ oppure $K \in \mathbb{R}^+$.

Con una espressione analitica unica, l'integrale generale di $y' = 2x(y-1)$ è la famiglia di funzioni $y_C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto y_C(x) := 1 + Ce^{x^2}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

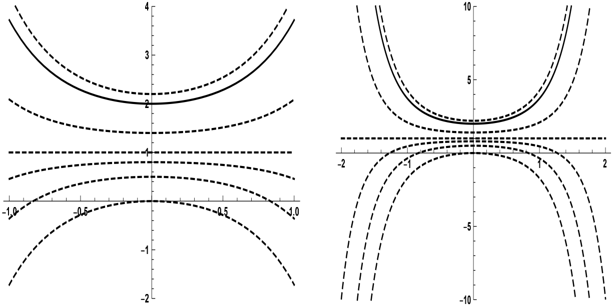
Soluzione del problema di Cauchy
Cerchiamo fra le y_C una che soddisfi la condizione iniziale $y(0) = 2$. Poichè

$$y_C(0) = 1 + C$$

basta scegliere $C = 1$. Quindi la funzione

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto 1 + e^{x^2}$$

è una soluzione del problema di Cauchy. La teoria assicura che questa è anche l'unica soluzione (definita su $\mathbb{R}$) del problema di Cauchy.



Parte dei grafici di alcune soluzioni dell'equazione (tratteggiate) e dell'unica soluzione del problema di Cauchy (linea continua), a diverse scale.

Example

La famiglia di funzioni $y_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$t \mapsto y_c(t) := \begin{cases} 0 & t \leq c \\ \pm(t-c)^{3/2} & c < t \end{cases}$$

al variare di $c \in \mathbb{R}$ è un integrale generale di

$$y' = \frac{3}{2} y^{1/3}.$$

Il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{3}{2} y^{1/3} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

ha infinite soluzioni.