Equazioni Differenziali Lineari
Esempi

Raul Paolo Serapioni

Analisi Matematica 1
Analisi Matematica A – Primo modulo
Corsi di Laurea in Fisica e Matematica
Università di Trento

dicembre 2019

Definizione

Siano $a, b : I \to \mathbb{R}$ continue e definite su un intervallo I.

L'equazione differenziale

$$y' + a(x)y = b(x)$$

si dice lineare del primo ordine.
L'equazione

$$y' + a(x)y = 0$$

si dice lineare omogenea del primo ordine.

Il relativo problema di Cauchy è

$$\begin{cases} y' + a(x)y = b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

dove $x_0 \in I$.

Teorema

Siano $a, b : I \to \mathbb{R}$ continue nell'intervallo I.

L' unica soluzione $y : I \to \mathbb{R}$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + a(x)y = b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

è

$$x \mapsto y(x) := y_0 e^{-\int_{x_0}^{x} a(t)\, dt} + \int_{x_0}^{x} b(t) e^{-\int_t^x a(s)\, ds}\, dt.$$

Osservazione

- Per ogni fissato $x_0 \in I$ e per ogni fissato $c \in \mathbb{R}$, la funzione
$$x \mapsto y_c(x) := c\, e^{-\int_{x_0}^{x} a(s)ds} + \int_{x_0}^{x} b(s) e^{-\int_{s}^{x} a(t)dt}\, ds.$$
è una soluzione di $y' + a(x)y = b(x)$ in I.
- La famiglia di funzioni $y_c : I \to \mathbb{R}$
$$y_c(x) := c\, e^{-\int_{x_0}^{x} a(s)ds} + \int_{x_0}^{x} b(s) e^{-\int_{s}^{x} a(t)dt}\, ds, \qquad c \in \mathbb{R}$$
è l'integrale generale di $y' + a(x)y = b(x)$.

Osservazione

Tutte le soluzioni sono definite sullo stesso intervallo I.

Osservazione

Questo è uno dei pochissimi casi in cui è possibile scrivere una *formula generale esplicita* che dia l'integrale generale.

Osservazione

Nell'integrale generale

- il primo addendo, cioè la famiglia di funzioni

$$x \mapsto w_c(x) := ce^{-\int_{x_0}^{x} a(s)ds}, \qquad c \in \mathbb{R}$$

  è l'integrale generale dell'*equazione omogenea* $y' + a(x)y = 0$.

- il secondo addendo

$$x \mapsto \phi(x) := \int_{x_0}^{x} b(s)e^{\int_x^s a(t)dt}\, ds$$

  è una soluzione dell'*equazione completa* $y' + a(x)y = b(x)$.

Infatti:

$$w_c'(x) = -ca(x)e^{-\int_{x_0}^{x} a(s)ds} = -a(x)w_c(x).$$

$$\begin{aligned}\phi'(x) &= b(x)e^{\int_x^x a(t)dt} + \int_{x_0}^{x} b(s)e^{\int_x^s a(t)dt}(-a(x))\, ds \\ &= b(x) - a(x)\int_{x_0}^{x} b(s)e^{\int_x^s a(t)dt}\, ds \\ &= b(x) - a(x)\phi(x).\end{aligned}$$

Quindi

L'integrale generale di $y' + a(x)y = b(x)$ è la somma

- dell'integrale generale dell'equazione omogenea e
- di una soluzione particolare dell'equazione completa.

Osservazione

L'integrale generale può essere scritto anche come integrale indefinito.
Se $A : I \to \mathbb{R}$ è una qualsiasi primitiva di a in I allora

$$x \mapsto y(x) := e^{-A(x)} \int b(x) e^{A(x)}\, dx$$

è l'integrale generale di $y' + a(x)y = b(x)$.

Nella formula precedente $x \mapsto \int b(x)e^{A(x)}\, dx$ indica la famiglia delle primitive di $x \mapsto b(x)e^{A(x)}$ in I.

Infatti:

Scegliamo $A(x) := \int_{x_0}^{x} a(s)ds$. Allora:

$$
\begin{aligned}
x \mapsto y_c(x) &:= c\, e^{-\int_{x_0}^{x} a(s)ds} + \int_{x_0}^{x} b(s) e^{\int_{x}^{s} a(t)dt}\, ds \\
&= c\, e^{-\int_{x_0}^{x} a(s)ds} + e^{-\int_{x_0}^{x} a(s)ds} \int_{x_0}^{x} b(s) e^{\int_{x_0}^{s} a(t)dt}\, ds \\
&= e^{-\int_{x_0}^{x} a(s)ds} \left(c + \int_{x_0}^{x} b(s) e^{\int_{x_0}^{s} a(t)dt}\, ds \right) \\
&= e^{-A(x)} \left(c + \int_{x_0}^{x} b(s) e^{A(s)}\, ds \right) \\
&= e^{-A(x)} \int b(x) e^{A(x)}\, dx.
\end{aligned}
$$

Example

Risolvete il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + xy = x^3 \\ y(0) = 2 \end{cases} \tag{1}$$

Utilizzando la formula esplicita con $x_0 := 0$, $y_0 := 2$, $a(x) := x$ e $b(x) := x^3$

$$\begin{aligned} y(x) &= 2e^{-\int_0^x t\,dt} + \int_0^x t^3 e^{\int_x^t s\,ds}\,dt \\ &= 2e^{-x^2/2} + \int_0^x t^3 e^{t^2/2 - x^2/2}\,dt \\ &= e^{-x^2/2}\left(2 + \int_0^x t^3 e^{t^2/2}\,dt\right). \end{aligned}$$

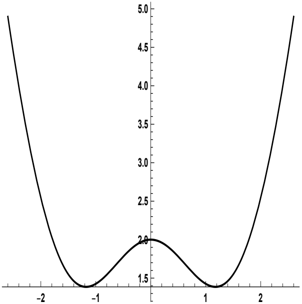
Integrando per parti

$$\int_0^x t^3 e^{t^2/2} = x^2 e^{x^2/2} - 2e^{x^2/2} + 2,$$

quindi la soluzione di (1) è

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-x^2/2}\left(2 + x^2 e^{x^2/2} - 2e^{x^2/2} + 2\right) \\ &= x^2 - 2 + 4e^{-x^2/2}. \end{aligned}$$

Un grafico approssimativo è



Parte del grafico della soluzione del problema di Cauchy

Definizione

Siano α, β e g funzioni continue definite su uno stesso intervallo I.
L'equazione

$$y'' + \alpha(x)y' + \beta(x)y = g(x) \tag{2}$$

si dice equazione lineare del secondo ordine.

Il relativo problema di Cauchy è

$$\begin{cases} y'' + \alpha(x)y' + \beta(x)y = g(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases} \tag{3}$$

dove $x_0 \in I$.

Teorema

L'integrale generale dell'equazione completa

$$y'' + \alpha(x)y' + \beta(x)y = g(x)$$

si ottiene sommando l'integrale generale dell'equazione omogenea

$$y'' + \alpha(x)y' + \beta(x)y = 0$$

e una soluzione particolare dell'equazione completa.

L'integrale generale dell'equazione omogenea è uno spazio vettoriale di dimensione 2 ottenuto combinando linearmente due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea.

Teorema

Se $\alpha, \beta, g : I \to \mathbb{R}$ sono continue sull'intervallo I e se $x_0 \in I$ allora:

il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + \alpha(x)y' + \beta(x)y = g(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases} \tag{4}$$

ha una unica soluzione $y = y(x) \in C^2(I)$ per ogni coppia di dati iniziali y_0, y_1.

Sono un caso particolare delle equazioni precedenti. Sono del tipo

$$y'' + Ay' + By = f(t), \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Per queste equazioni è facile calcolare due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea associata

$$y'' + Ay' + By = 0. \tag{5}$$

Ci limitiamo qui ad un breve cenno sul calcolo dell'integrale generale.
Poichè l'operatore differenziale $y \mapsto y'' + Ay' + By$ è *lineare* l'integrale generale $t \mapsto y(t, c_1, c_2)$ è la somma di due parti

$$y(t, c_1, c_2) = w(t, c_1, c_2) + \varphi(t)$$

dove

$$t \mapsto w(t, c_1, c_2) \quad \text{è l'integrale generale di } y'' + Ay' + By = 0$$

e

$$t \mapsto \varphi(t) \quad \text{è una soluzione di } y'' + Ay' + By = f(t).$$

Quindi il problema di trovare l'integrale generale si spezza nei due problemi 'più semplici'

1. trovare l'integrale generale dell'equazione omogenea
$$y'' + Ay' + By = 0,$$
2. trovare una cosiddetta *soluzione particolare* cioè almeno una soluzione dell'equazione completa.

Ricerca dell'integrale dell'equazione omogenea:

$$\lambda^2 + A\lambda + B = 0. \tag{ec}$$

se $A^2 - 4B > 0$: (ec) ha due soluzioni reali distinte: λ_1 e λ_2.
L'integrale generale è

$$t \mapsto w(t, c_1, c_2) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}.$$

se $A^2 - 4B = 0$: (ec) ha la sola soluzione $\bar{\lambda} = -A/2$.
L'integrale generale è

$$t \mapsto w(t, c_1, c_2) = (c_1 + tc_2)e^{-At/2}.$$

se $A^2 - 4B < 0$: (ec) ha due soluzioni complesse coniugate.
Ponendo $\omega := \sqrt{4B - A^2}/2$, l'integrale generale è

$$t \mapsto w(t, c_1, c_2) = e^{-At/2}\left(c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)\right).$$

Per la ricerca della soluzione particolare esistono tecniche di applicazione generale, per esempio il cosiddetto metodo di variazione delle costanti arbitrarie ed altre, più semplici, ma di applicabilità molto più limitata, come il metodo di similarità. Seguendo questo secondo metodo, se il *termine noto* f ha una forma algebrica particolare è possibile trovare la soluzione particolare φ della stessa forma algebrica. Per esempio se f fosse un polinomio di grado n nella variabile t allora è possibile trovare (tranne che in casi molto particolari) una soluzione particolare che sia anche essa un polinomio di grado n. Analogamente se f fosse un esponenziale o una funzione trigonometrica.

Example

Risolvete il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 5y' + 6y = 0 \\ y(0) = y_0 \\ y'(0) = y_1 . \end{cases}$$

- Troviamo l'integrale generale dell'equazione $y'' - 5y' + 6y = 0$.
  L'equazione caratteristica associata è

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

che ha le due soluzioni reali $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = 2$. Quindi le due funzioni $v_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $v_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite da

$$t \mapsto v_1(t) := e^{2t}, \qquad t \mapsto v_2(t) := e^{3t}$$

sono due soluzioni di $y'' - 5y' + 6y = 0$. Esse sono linearmente indipendenti e quindi l'integrale generale di $y'' - 5y' + 6y = 0$ è la famiglia di funzioni $w_{c_1,c_2} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dipendente dai due parametri reali c_1 e c_2,

$$t \mapsto w_{c_1,c_2}(t) := c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t}.$$

- Determiniamo i due parametri c_1 e c_2 in modo che le condizioni iniziali siano soddisfatte. Poichè

$$w_{c_1,c_2}(0) = c_1 + c_2, \text{ e } \quad w'_{c_1,c_2}(0) = 2c_1 + 3c_2,$$

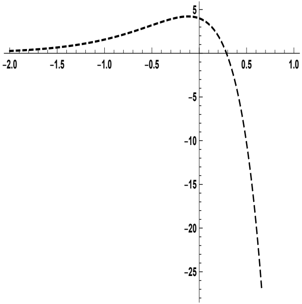
c_1 e c_2 sono determinati risolvendo il sistema lineare

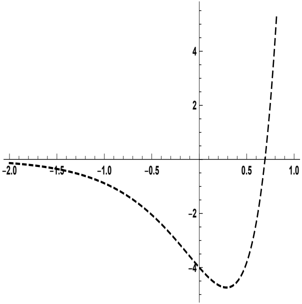
$$\begin{cases} c_1 + c_2 = y_0 \\ 2c_1 + 3c_2 = y_1 . \end{cases}$$

Le soluzioni sono $c_1 = 3y_0 - y_1$ e $c_2 = y_1 - 2y_0$. Quindi l'unica soluzione è

$$t \mapsto y(t) := (3y_0 - y_1)e^{2t} + (y_1 - 2y_0)e^{3t}.$$

- Andamento di due soluzione per diversi dati iniziali.





Parte dei grafici di due soluzioni del problema.

Ancora un esempio "di scuola".

Example

Risolvete il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 5y' + 6y = \cos 2t \\ y(0) = y_0 \\ y'(0) = y_1 . \end{cases} \tag{6}$$

- Ricerca dell'integrale generale dell'equazione *omogenea* $y'' + 5y' + 6y = 0$.

  L'equazione caratteristica associata è

  $$\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$$

  che ha le due soluzioni reali $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = -3$. Quindi le due funzioni $v_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $v_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

  $$t \mapsto v_1(t) := e^{-2t}, \qquad t \mapsto v_2(t) := e^{-3t}$$

  sono due soluzioni di $y'' + 5y' + 6y = 0$. L' integrale generale di $y'' + 5y' + 6y = 0$ è $w_{c_1,c_2} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

  $$t \mapsto w_{c_1,c_2}(t) := c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

- Ricerca di una *soluzione* di $y'' + 5y' + 6y = \cos 2t$.

  Usando il *metodo di similarità*, cerchiamo una soluzione $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ del tipo

  $$t \mapsto \psi(t) := A \sin 2t + B \cos 2t$$

  e determiniamo A e B in modo che ψ sia una soluzione di $y'' + 5y' + 6y = \cos 2t$.

  $$\psi'(t) := 2A \cos 2t - 2B \sin 2t$$
  $$\psi''(t) := -4A \sin 2t - 4B \cos 2t$$

che sostituiti nell'equazione

$$(2A - 10B)\sin 2t + (2B + 10A)\cos 2t = \cos 2t.$$

Questa equazione è verificata per ogni $t \in \mathbb{R}$ se

$$\begin{cases} 2A - 10B = 0 \\ 10A + 2B = 1 \end{cases}$$

quindi per $A = 5/52$ e $B = 1/52$. La soluzione particolare ψ è

$$t \mapsto \psi(t) := 5/52 \sin 2t + 1/52 \cos 2t.$$

- L'integrale generale y_{c_1,c_2} dell'equazione completa è la somma dell'integrale generale dell'equazione omogenea e di una soluzione particolare dell'equazione completa.

$$t \mapsto y_{c_1,c_2}(t) := c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t} + 5/52 \sin 2t + 1/52 \cos 2t.$$

- Determiniamo c_1 e c_2 in modo che le condizioni iniziali siano soddisfatte. Poichè

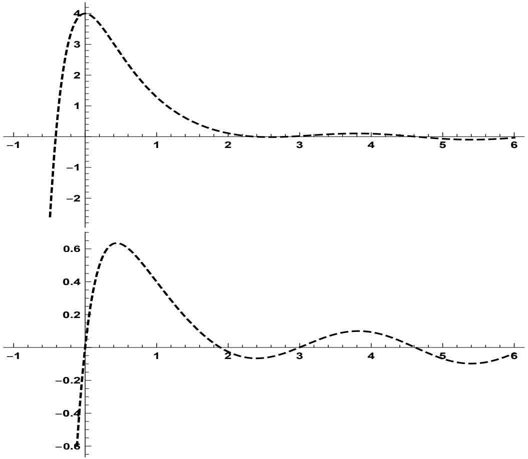
$$y_{c_1,c_2}(0) = c_1 + c_2 + 1/52, \qquad y'_{c_1,c_2}(0) = -2c_1 - 3c_2 + 5/26,$$

c_1 e c_2 sono soluzioni di $\begin{cases} c_1 + c_2 = y_0 - 1/52 \\ -2c_1 - 3c_2 = y_1 - 5/26. \end{cases}$

Quindi $c_1 = 3y_0 + y_1 - 1/4$ e $c_2 = -2y_0 - y_1 + 6/26$.

- L'unica soluzione del problema di Cauchy è

$$t \mapsto y(t) := (3y_0 + y_1 - 1/4)e^{-2t} + (-2y_0 - y_1 + 6/26)e^{-3t} + \\ + 5 \sin 2t/52 + \cos 2t/52.$$



Parte dei grafici di due soluzioni del problema:
nel primo $y_0 = 4$ e $y_1 = 0$; nel secondo $y_0 = 0$ e $y_1 = 4$.