# Equazioni differenziali
# Alcuni esempi

Raul Paolo Serapioni

Analisi Matematica 1
Analisi Matematica A – Primo modulo
Corsi di Laurea in Fisica e Matematica
Università di Trento

*dicembre 2019*

**Example (Caduta di un grave senza resistenza dell'aria)**

$t \mapsto y(t)$ rappresenta l'altezza rispetto al suolo di un grave. Se l'oggetto è sottoposto solo alla forza di gravità $t \mapsto y(t)$ soddisfa l'equazione

$$y'' = -g$$

dove $g > 0$ è l'accelerazione gravitazionale (che supponiamo costante in questo modello semplificato).

Tutte le soluzioni sono del tipo

$$t \mapsto y(t) = -\frac{g}{2}t^2 + c_1 t + c_0 \qquad \text{per } t \in \mathbb{R}$$

dove $c_1$ e $c_0$ sono costanti arbitrarie.

Significato fisico delle costanti:
$c_0 = h_0$ è la posizione all'istante iniziale; $c_1 = v_0$ è la velocità nel medesimo istante.

$$t \mapsto y(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_0 t + h_0 \qquad \text{per } t \in \mathbb{R}$$

è l'unica soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' = -g \\ y(0) = h_0, \\ y'(0) = v_0. \end{cases} \tag{i}$$

## Example (Caduta di un grave con resistenza dell'aria)

Studiamo ora lo stesso modello tenendo conto della resistenza dell'aria.
Supponiamo che la resistenza sia proporzionale alla velocità attraverso un coefficiente di proporzionalità $\beta > 0$. Otteniamo l'equazione

$$y'' = -g - \beta y'.$$

L'equazione

$$y'' + \beta y' = -g$$

è lineare del secondo ordine a coefficienti costanti e può essere trattata come negli esempi precedenti.

Si può alternativamente osservare che l'equazione è un'equazione del primo ordine nella variabile $y'$. Con il cambio di variabile

$$p(t) := y'(t)$$

la funzione $t \mapsto p(t)$ soddisfa l'equazione differenziale lineare del primo ordine (a coefficienti costanti)

$$p' = -g - \beta p.$$

L'integrale generale, al variare del parametro $c_1$, è

$$t \mapsto p(t) = -\frac{g}{\beta} + \frac{c_1}{\beta} e^{-\beta t}, \qquad \text{per } t \in \mathbb{R}.$$

Integrando in $t$ otteniamo un'espressione per $t \mapsto y(t)$, dipendente da due parametri $c_0$ e $c_1$,

$$t \mapsto y(t) = c_0 - \frac{g}{\beta} t + \frac{c_1}{\beta^2} \left( e^{-\beta t} - 1 \right), \qquad \text{per } t \in \mathbb{R}.$$

Le due condizioni iniziali su posizione $h_0$ e velocità $v_0$ all'istante $t = 0$ determinano univocamente $c_0$ e $c_1$ ottenendo

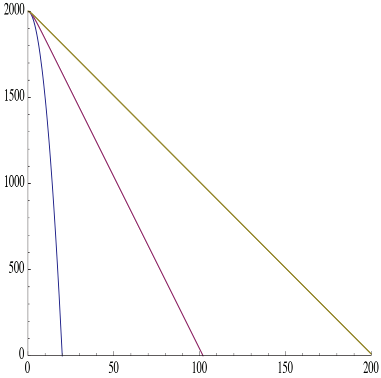
$$c_0 = h_0, \qquad c_1 = -g - \beta v_0.$$

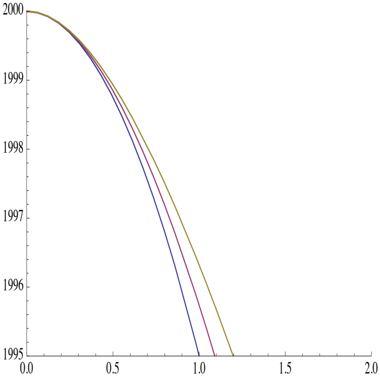
Quindi

$$t \mapsto y(t) = h_0 - \frac{g}{\beta} t + \frac{g - \beta v_0}{\beta^2} \left(e^{-\beta t} - 1\right) \quad \text{per } t \in \mathbb{R}$$

è l'unica soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' = -g - \beta y \\ y(0) = h_0, \\ y'(0) = v_0. \end{cases} \tag{ii}$$




Il grafico della soluzione di (i) (un arco di parabola) e di due soluzioni di (ii) (curve asintoticamente lineari) per diversi valori di $\beta$.
In tutti casi $h_0 = 2000$ e $v_0 = 0$.
Le tre curve sono vicine, anzi tangenti per $t = 0$, perchè quando la velocità $y'(t)$ è piccola la resistenza dell'aria è trascurabile.

## Example (Vibrazioni meccaniche libere)

Sia $P$ un punto materiale vincolato a muoversi su una retta e soggetto ad una forza elastica attrattiva, cioè proporzionale alla distanza del punto materiale $P$ da un centro fisso che identifichiamo con l'origine $O$.

Indichiamo con $t \mapsto y(t)$ la posizione del punto $P$ sulla retta e supponiamo che $O$ coincida con il punto di coordinata $y = 0$.

L'equazione del moto è data da

$$my''(t) = -ky(t)$$

dove $m$ è la massa di $P$ e $k > 0$ è una costante caratteristica della forza elastica (per esempio potrebbe essere il coefficiente di elasticità di una molla).

Se poniamo $\omega := \sqrt{\frac{k}{m}}$ otteniamo l'equazione differenziale lineare del secondo ordine

$$y'' = -\omega^2 y \tag{1}$$

e il relativo problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + \omega^2 y = 0 \\ y(0) = y_0 \\ y'(0) = y_1 . \end{cases} \tag{iii}$$

Il problema (iii) può essere esplicitamente risolto seguendo la seguente procedura.

Troviamo l'integrale generale dell'equazione $y'' + \omega^2 y = 0$. L'equazione caratteristica associata è

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0$$

che ha le due soluzioni (complesse coniugate) $\lambda_1 = \omega i$ e $\lambda_2 = -\omega i$. Quindi, $v_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $v_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite da

$$t \mapsto v_1(t) := \cos(\omega t), \qquad t \mapsto v_2(t) := \sin(\omega t)$$

sono due soluzioni, linearmente indipendenti, di $y'' + \omega^2 y = 0$. Quindi l'integrale generale è la famiglia di funzioni $w_{c_1,c_2} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dipendente dai due parametri reali $c_1$ e $c_2$,

$$t \mapsto w_{c_1,c_2}(t) := c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)$$

Determiniamo i due parametri $c_1$ e $c_2$ in modo che le condizioni iniziali siano soddisfatte.

$$w_{c_1,c_2}(0) = c_1, \text{ quindi la prima condizione implica } c_1 = y_0.$$

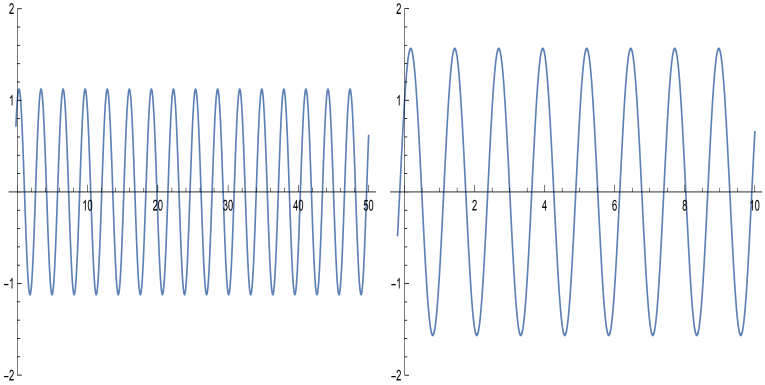
Infine, $w'_{c_1,c_2}(t) = -c_1\,\omega \sin(\omega t) + c_2 \omega \cos(\omega t)$ e quindi

$$w'_{c_1,c_2}(0) = c_2\,\omega, \text{ e la seconda condizione implica } c_2 = y_1/\omega.$$

$$t \mapsto y(t) := y_0 \cos(\omega t) + \frac{y_1}{\omega} \sin(\omega t)$$

è l'unica soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + \omega^2 y = 0 \\ y(0) = y_0 \\ y'(0) = y_1 . \end{cases} \tag{iii}$$




Parte dei grafici delle soluzioni del problema di Cauchy:
a sinistra $\omega = 2$, $y_0 = 1$, $y_1 = 1$;
a destra $\omega = 5$, $y_0 = 1$, $y_1 = 6$.
Osservate la differenza di scala nella direzione orizzontale.

## Example (Vibrazioni meccaniche con forza esterna periodica)

Con considerazioni analoghe a quelle del problema precedente otteniamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + \omega^2 y = M\cos(\alpha t) \\ y(0) = y_0 \\ y'(0) = y_1 \end{cases} \tag{iv}$$

Se $\alpha \neq \omega$, l'unica soluzione del problema (iv) è

$$t \mapsto y(t) :=$$

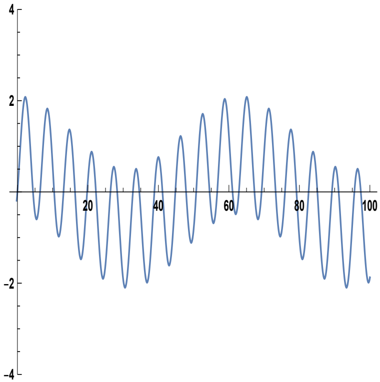
$$= y_0 \cos(\omega t) + \frac{y_1}{\omega}\sin(\omega t) + \frac{M}{\omega^2 - \alpha^2}\left(\cos(\alpha t) - \cos(\omega t)\right).$$

In particolare

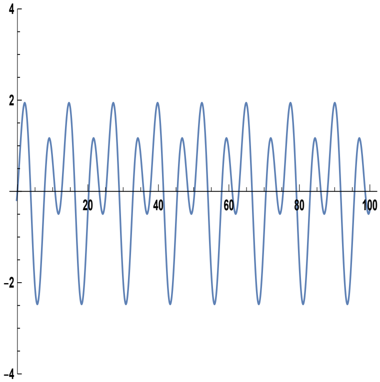
$$y(t) := \frac{M}{\omega^2 - \alpha^2}\left(\cos(\alpha t) - \cos(\omega t)\right) + \frac{1}{\omega}\sin(\omega t).$$

è l'unica soluzione di

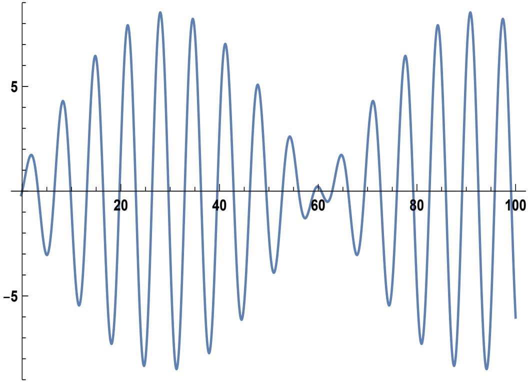
$$\begin{cases} y'' + \omega^2 y = M\cos(\alpha t) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases} \tag{iv}$$




A sinistra $\omega = 1$ e $\alpha = 0.1$.
A destra $\omega = 1$ e $\alpha = 0.2$.
In entrambi i casi si vede l'effetto della forza esterna di frequenza molto piú bassa di quella propria dell'oscillatore.




A sinistra $\omega = 1$ e $\alpha = 0.5$.
A destra $\omega = 1$ e $\alpha = 0.75$.
Inizia a diventare evidente un fenomeno di risonanza.




Qui $\omega = 1$ e $\alpha = 0.9$. La risonanza è evidente. Osservate anche il cambiamento di scala nella direzione verticale.

## Example (Vibrazioni meccaniche con resistenza)

Se sul punto materiale $P$ agisce anche una resistenza di tipo viscoso allora l'equazione del moto è

$$my''(t) = -ky(t) - \beta y'(t)$$

dove $\beta > 0$. Il relativo problema di Cauchy è

$$\begin{cases} y''(t) + \frac{\beta}{m}y' + \frac{k}{m}y = 0 \\ y(0) = y_0 \\ y'(0) = y_1 \end{cases} \tag{v}$$

Ponendo $\omega := \sqrt{\frac{k}{m}}$ e $\gamma := \frac{1}{2}\frac{\beta}{m}$ si ottiene l'equazione differenziale

$$y'' + 2\gamma y' + \omega^2 y = 0.$$

Da considerazioni fisiche sappiamo che il moto di $P$ ha caratteristiche molto diverse a seconda della relativa grandezza delle costanti fisiche $\gamma$ e $\omega$.
Se $\gamma << \omega$, cioè se la resistenza viscosa è molto piccola rispetto alla forza elastica, ci possiamo aspettare un moto ancora oscillante e (quasi) periodico.
Se la resistenza viscosa fosse più grande ($\gamma >> \omega$) ci possiamo aspettare una scomparsa totale del moto oscillatorio.

Se l'equazione è un buon modello per il moto di $P$ queste differenze di comportamento devono apparire nelle soluzioni.

## Se $\omega > \gamma$

l'equazione caratteristica $\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega^2 = 0$ ha le due soluzioni complesse coniugate

$$\lambda_1 = -\gamma - i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}, \qquad \lambda_2 = -\gamma + i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}$$

e l'integrale generale di $y'' + 2\gamma y' + \omega^2 y = 0$ è

$$t \mapsto y(t) := e^{-\gamma t}\left(c_1 \cos(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}\, t) + c_2 \sin(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}\, t)\right)$$

che può anche essere scritta come

$$t \mapsto y(t) := Ae^{-\gamma t}\cos(\nu t + \nu_0)$$

dove: $\nu = \sqrt{\omega^2 - \gamma^2}$ e $A$ e $\nu_0$ sono costanti arbitrarie.

## Osservazione

$$c_1 \cos(\nu\, t) + c_2 \sin(\nu\, t) = A \cos(\nu t + \nu_0)$$

$A$ e $\nu_0$ sono legate a $c_1$ e $c_2$ dalle relazioni

$$A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}, \qquad \nu_0 = \arccos \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}.$$

Per qualsiasi scelta di $c_1$ e $c_2$, oppure di $A$ e $\nu_0$, le soluzioni hanno limite 0 per $t \to +\infty$ e conservano un carattere oscillatorio, con una frequenza $\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} < \omega$ diversa da quella delle soluzioni del problema senza attrito.

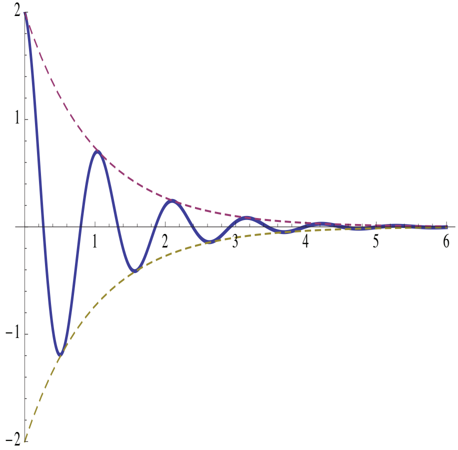



Figure: $\omega > \gamma$

Se $\gamma > \omega$

le soluzioni dell'equazione caratteristica sono

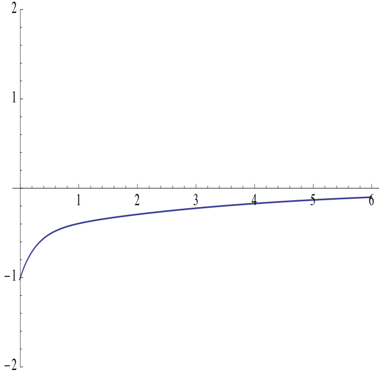
$\lambda_1 := -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega^2} < 0, \quad \lambda_2 := -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega^2} < 0.$

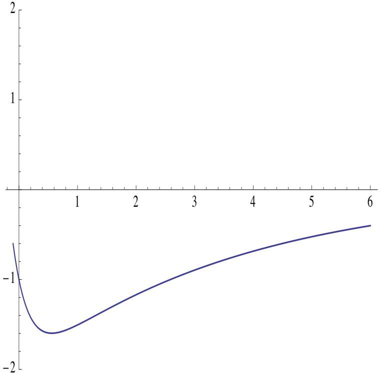
L'integrale generale di $y'' + 2\gamma y' + \omega^2 y = 0$ è

$$t \mapsto y(t) := c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

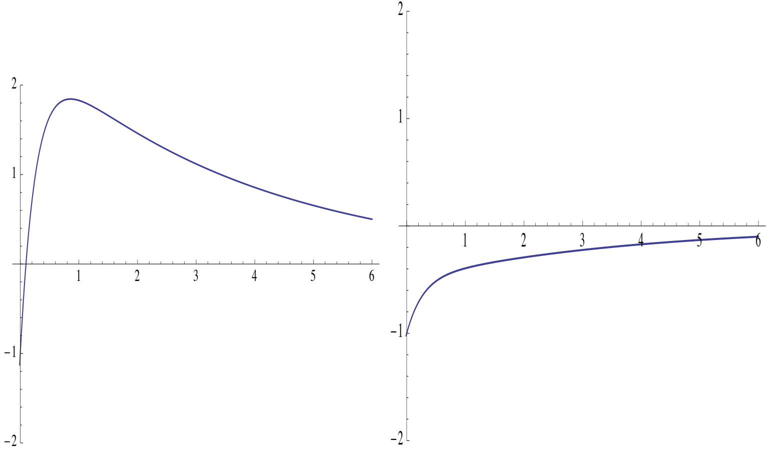
Per qualsiasi scelta di $c_1$ e $c_2$ le soluzioni hanno limite 0 per $t \to +\infty$ e ogni comportamento oscillatorio è completamente scomparso.

Andamenti tipici sono i seguenti




$$\gamma > \omega$$



$\gamma > \omega$

Se $\omega = \gamma$ l'equazione caratteristica $\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \gamma^2 = 0$ ha una sola soluzione reale $\lambda := -\gamma$ e le soluzioni sono

$$t \mapsto y(t) := (c_1 + c_2 t)\, e^{-\gamma t}$$