

Matematica: cosa stiamo studiando?

Raul Paolo Serapioni

Analisi Matematica A – Secondo modulo
Corso di Laurea in Matematica
Università di Trento

30 maggio 2019



La Matematica è una Scienza?

Le Scienze hanno un oggetto di studio

- la Fisica → ...
- la Chimica → ...
- l'Antropologia → ...
- la Storia → ...
- la Sociologia → ...
- la Filologia → ...



La Matematica è una Scienza?

Quale è "l'oggetto di studio" della Matematica?

- Gli enti matematici?
- Le dimostrazioni?
- La risoluzione di problemi?
- ...?? ...



La Matematica è una Scienza?

Quale è "l'oggetto di studio" della Matematica?

- Gli enti matematici?
- Le dimostrazioni?
- La risoluzione di problemi?
- ...?? ...



La Leggenda della Matematica

- La Matematica è astratta e disincarnata ma reale.
Ha esistenza oggettiva.
Struttura questo universo e ogni possibile universo.
- La matematica conosciuta dagli umani è una parte di una
Matematica astratta e trascendente.
Le dimostrazioni ci permettono di scoprire questa
Matematica trascendente.
- La Matematica è parte dell'universo fisico e ne fornisce la
struttura razionale.
- La Matematica caratterizza la logica e quindi ogni forma di
ragionamento astratto.



La Leggenda della Matematica

- La Matematica è astratta e disincarnata ma reale.
Ha esistenza oggettiva.
Struttura questo universo e ogni possibile universo.
- La matematica conosciuta dagli umani è una parte di una Matematica astratta e trascendente.
Le dimostrazioni ci permettono di scoprire questa Matematica trascendente.
- La Matematica è parte dell'universo fisico e ne fornisce la struttura razionale.
- La Matematica caratterizza la logica e quindi ogni forma di ragionamento astratto.



La Leggenda della Matematica

- La Matematica è astratta e disincarnata ma reale.
Ha esistenza oggettiva.
Struttura questo universo e ogni possibile universo.
- La matematica conosciuta dagli umani è una parte di una
Matematica astratta e trascendente.
Le dimostrazioni ci permettono di scoprire questa
Matematica trascendente.
- La Matematica è parte dell'universo fisico e ne fornisce la
struttura razionale.
- La Matematica caratterizza la logica e quindi ogni forma di
ragionamento astratto.



La Leggenda della Matematica

- La Matematica è astratta e disincarnata ma reale.
Ha esistenza oggettiva.
Struttura questo universo e ogni possibile universo.
- La matematica conosciuta dagli umani è una parte di una
Matematica astratta e trascendente.
Le dimostrazioni ci permettono di scoprire questa
Matematica trascendente.
- La Matematica è parte dell'universo fisico e ne fornisce la
struttura razionale.
- La Matematica caratterizza la logica e quindi ogni forma di
ragionamento astratto.



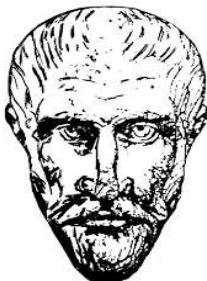
La Leggenda della Matematica

- La Matematica è astratta e disincarnata ma reale.
Ha esistenza oggettiva.
Struttura questo universo e ogni possibile universo.
- La matematica conosciuta dagli umani è una parte di una
Matematica astratta e trascendente.
Le dimostrazioni ci permettono di scoprire questa
Matematica trascendente.
- La Matematica è parte dell'universo fisico e ne fornisce la
struttura razionale.
- La Matematica caratterizza la logica e quindi ogni forma di
ragionamento astratto.



- La Matematica è la regina delle scienze.
 - Definisce che cosa sia la precisione.
 - La capacità di fare modelli matematici della realtà e di svolgere calcoli su questi modelli è quello che rende la scienza quello che è.
 - Si applica e ha la precedenza su tutte le altre scienze.
 - *Solo la Matematica può caratterizzare la vera natura della Matematica.*





PROCLUS

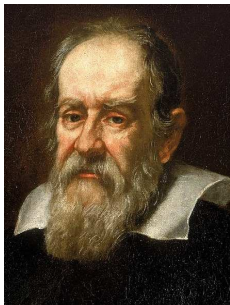
Proclo (412–485)

Commento al primo libro degli Elementi di Euclide

Questa è quindi la matematica:
Ricorda a noi la forma dell'anima invisibile
Illumina le sue scoperte
Risveglia la mente e purifica l'intelletto
Chiarisce le nostre idee
Annulla oblio e ignoranza nostri fin dalla
nascita [...]

Citato da M. Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*





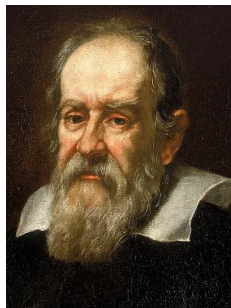
Galileo Galilei
(1564–1642)

Il Saggiatore (1623)

[. . .] La filosofia naturale è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi agli occhi, io dico l'universo, ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua e conoscer i caratteri nei quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a intenderne umanamente parola [. . .]

Cap.6





Galileo Galilei
(1564–1642)

Dialogo dei Massimi Sistemi (1632)

[...] le scienze matematiche pure, cioè la geometria e l'aritmetica, delle quali l'intelletto divino ne sa ben infinite proposizioni di più, perché le sa tutte, ma di quelle poche intese dall'intelletto umano credo che la cognizione agguagli la divina nella certezza obiettiva [...]





René Descartes
(1596–1650)

Méditations métaphysiques (1641)

Quando io immagino un triangolo, sebbene forse non ci sia in alcun luogo del mondo una tale figura fuori dal mio pensiero [. . .] non perciò tuttavia cessa di esservi una certa natura, o forma, o essenza determinata di questa figura, la quale è immutabile ed eterna, né io l'ho inventata, né dipende dal mio spirito [. . .]

cit. da Lolli *Filosofia della Matematica*





Thomas Hobbes
(1588–1679)

Leviathan (1651)

Per ragionamento intendo il calcolo. Calcolare significa cogliere la somma di più cose aggiunte l'una all'altra, oppure, conoscere quel che rimane se si detrae una cosa dall'altra. Ragionare pertanto equivale ad addizionare e sottrarre, e se poi uno vi aggiungesse moltiplicare e dividere, non mi opporrei [...]
Ogni ragionamento quindi si riduce a due operazioni mentali, addizione e sottrazione. [...]

Correnti filosofiche fra 800 e 900

Realismo

- Gli enti di cui si parla nelle teorie matematiche sono oggettivi
- Sono indipendenti dal nostro modo di conoscerli

Una forma forte di realismo è il "platonismo"...

Platonismo

- Gli enti di cui si parla nelle teorie matematiche esistono
- Le teorie che li riguardano sono in larga misura vere
- La loro verità è indipendente dalla nostra conoscenza e dal nostro modo di conoscerle



Correnti filosofiche fra 800 e 900

Realismo

- Gli enti di cui si parla nelle teorie matematiche sono oggettivi
- Sono indipendenti dal nostro modo di conoscerli

Una forma forte di realismo è il "platonismo"...

Platonismo

- Gli enti di cui si parla nelle teorie matematiche esistono
- Le teorie che li riguardano sono in larga misura vere
- La loro verità è indipendente dalla nostra conoscenza e dal nostro modo di conoscerle



Nominalismo

- Le entità astratte non esistono
- Gli insiemi infiniti non esistono e le procedure infinite (e.g. l'induzione) non sono accettabili, quindi . . .
 - Ruolo importante di metodi dimostrativi costruttivi e finiti
 - Uso di logiche "deboli" (rifiuto del "terzo escluso")

cfr. Lolli *Filosofia della Matematica*



Formalismo

La matematica è un "gioco formale" di manipolazione di simboli

Convenzionalismo

Le teorie matematiche non sono "vere", ma possono essere più o meno "utili"

cfr. Lolli *Filosofia della Matematica*





Charles Hermite
(1822–1901)

[...] lo credo che i numeri e le funzioni dell'analisi non siano il prodotto arbitrario del nostro spirito; penso che esse esistano al di fuori di noi con lo stesso carattere necessario della realtà oggettiva e che noi le incontriamo, le scopriamo e le studiamo come fanno i chimici i fisici e gli zoologi [...] (1894)

cit. da Lolli *Filosofia della Matematica*





Charles Hermite
(1822–1901)

Esiste, se non mi sbaglio, un intero mondo che è la totalità delle verità matematiche, mondo al quale noi abbiamo accesso solo con la nostra mente, esistente proprio come esiste il mondo della realtà fisica; l'uno e l'altro indipendenti da noi ed entrambi creazioni divine [...]

cit. by Gaston Darboux, *Eloges académiques et discours*, Hermann, Paris 1912.





Guido Castelnuovo
(1865–1952)

La geometria algebrica e la scuola italiana, 1928

Avevamo costruito, in senso astratto s'intende, un gran numero di modelli di superficie del nostro spazio o di spazi superiori; e questi modelli avevamo distribuito, per dir così, in due vetrine. Una conteneva le superficie regolari per le quali tutto procedeva come nel migliore dei mondi possibili; l'analogia permetteva di trasportare ad esse le proprietà più salienti delle curve piane. Ma quando cercavamo di verificare queste proprietà sulle superficie dell'altra vetrina, le irregolari, cominciavano i guai e si presentavano eccezioni di ogni specie

...



Guido Castelnuovo
(1865–1952)

Alla fine lo studio assiduo dei nostri modelli ci aveva condotto a divinare alcune proprietà che dovevano sussistere, con modificazioni opportune, per le superficie di ambedue le vetrine; mettevamo poi a cimento queste proprietà con la costruzione di nuovi modelli. Se resistevano alla prova, ne cercavamo, ultima fase, la giustificazione logica. Col detto procedimento, *che assomiglia a quello tenuto nelle scienze sperimentali*, siamo riusciti a stabilire alcuni caratteri distintivi tra le famiglie di superficie.





Godfrey Harold Hardy
(1877–1947)

A mathematician's Apology (1941)

La realtà matematica giace fuori di noi e la nostra funzione è quella di scoprirla e osservarla, e i teoremi che noi dimostriamo e che, in modo magniloquente, descriviamo come nostre creazioni sono semplicemente i resoconti delle nostre osservazioni

cit. da Lolli *Filosofia della Matematica*





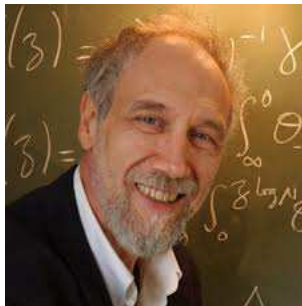
Kurt Gödel
(1906–1978)

in *La logica matematica di Russel* (1944)

Classi e concetti possono essere concepiti come oggetti reali . . .
Sembra a me che l'assunzione di tali concetti sia altrettanto legittima dell'assunzione dei corpi fisici e che ci sia altrettanta ragione nel credere alla loro esistenza.

cit. da Lolli *Filosofia della Matematica*





Alain Connes
(1947)

in *Pensiero e Materia* (1985)

Per me la lista dei numeri primi [...] ha una realtà più stabile della realtà materiale che ci circonda.

Possiamo paragonare il lavoro di un matematico a quello di un esploratore alla scoperta del mondo.

Io credo che un matematico sviluppi un "senso" irriducibile alla vista, all'udito, al tatto, che gli permette di percepire una realtà vincolante come la realtà fisica ma molto più stabile, perché non localizzata nello spazio e nel tempo.

Nominalismo



Hermann Weyl
(1885–1955)

in *Filosofia della matematica e delle scienze naturali* (1926)

Se nonostante tutto, si vuole continuare a concepire i numeri come concetti od oggetti ideali, bisogna comunque astenersi dall'attribuire loro un'esistenza indipendente; il loro essere si esaurisce nella funzione svolta e nelle reciproche relazioni di maggiore o minore.

cit. da Lolli *Filosofia della Matematica*





Abraham Robinson
(1918–1974)

in *Logic, Methodology and Philosophy of Science* (1964)

La mia posizione riguardo i fondamenti della matematica è basata sui due seguenti punti fermi o principi:

- le totalità infinite non esistono in nessun senso della parola e . . . le frasi che pretendono di parlarne sono prive di significato
- nondimeno noi dovremmo continuare "il commercio" della matematica "come al solito" cioè come se le totalità infinite esistessero davvero . . .

cit. da Lolli *Filosofia della Matematica*



Jean Dieudonné
(1906–1992)

in *Les méthodes axiomatiques modernes* (1948)

Sui fondamenti, noi crediamo alla realtà della matematica, ma [...] quando i filosofi ci attaccano con i loro paradossi noi corriamo a ripararci dietro al formalismo :

"La matematica è solo una manipolazione di simboli privi di significato" [...]

Finalmente siamo lasciati in pace e possiamo tornare alla nostra matematica [...] con la sensazione che ha ogni matematico di lavorare con qualche cosa di reale.

Probabilmente questa sensazione è una illusione, ma è molto comoda. Questo è l'atteggiamento di Bourbaki [...]

cit. da Lolli *Filosofia della Matematica*

Bourbaki



Seminario Bourbaki (1938)



- Henri Cartan
- André Weil
- Claude Chevalley
- Charles Ehresmann
- Jean-Pierre Serre
- Laurent Schwartz
- Jean Dieudonné
- ...





Paul Joseph Cohen
(1934–2007)

in Comments on the foundations of set theory (1971)

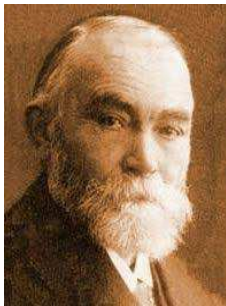
Al matematico medio che vuole solo credere che il suo lavoro ha basi sicure, la scelta più allettante è quella di evitare ogni difficoltà facendo appello al programma di Hilbert. Si considera la matematica come un *gioco formale* e l'unica preoccupazione è quella della non contraddittorietà.

cit. da Lolli *Filosofia della Matematica*



Formalismo: problemi?

Il formalismo lascia aperti molti problemi, per esempio quello della spiegazione della "utilità" della matematica.



Gottlob Frege
(1848–1925)

in *I Principi dell'aritmetica* (1893-1902)

Come si distingue l'aritmetica formalista da un gioco puro e semplice? ... richiamandosi alla sua utilità nella spiegazione della natura. ... i numeri significano qualche cosa mentre le figure degli scacchi non significano niente. [...] proprio in questi significati le regole [dei numeri] troverebbero la loro fondazione.

cit. da Lolli *Filosofia della Matematica*

Formalismo: problemi?



Eugene P. Wigner
(1902–1995)

The unreasonable effectiveness of mathematics in natural sciences (1960)

[...] l'enorme utilità della matematica nelle scienze naturali è qualche cosa che rasenta il mistero e di cui non esiste alcuna spiegazione razionale [...]

[...] la matematica è la scienza delle operazioni ingegnose con regole e concetti inventati apposta a tale scopo [...]



Julius Henri
Poincaré
(1854–1912)

in *La scienza e l'ipotesi* (1902)

Gli assiomi geometrici non sono [...] né giudizi sintetici a priori né fatti sperimentali. Sono *convenzioni*: tra tutte le convenzioni possibili la nostra scelta è guidata da fatti sperimentali; ma resta libera ed è limitata unicamente dalla necessità di evitare qualsiasi contraddizione.

Una geometria non può essere più vera di un'altra, può essere solo più *comoda*.



Evoluzionismo e Neuroscienze

- *Il radicamento della mente nel corpo.*
Le nostre idee e modi di ragionamento, matematica compresa, sono determinati dalla struttura del nostro corpo e del nostro cervello.
- *L'esistenza di una parte inconscia dell'attività cognitiva.*
La maggior parte delle nostro pensiero, anche quello matematico, non è accessibile alla coscienza.
- *Il pensiero metaforico:* gli esseri umani concettualizzano i concetti astratti in termini concreti spesso basati sul sistema senso-motorio. Anche il pensiero matematico usa metafore concettuali di questo tipo.



Evoluzionismo e Neuroscienze

- Quali meccanismi del cervello e della mente permettono agli esseri umani di formulare idee matematiche?
- La matematica fondata su cervello e mente è tutta la matematica o esiste una Matematica che trascende corpi e menti e che struttura l'universo (e tutti gli universi possibili)?



Evoluzionismo e Neuroscienze

G. Vallortigara in *Cervelli che contano* (2014)

Quello che abbiamo appreso dagli studi neurobiologici suggerisce che i numeri sono incarnati nell'attività fisica del cervello:

la numerosità è un dato di esperienza primaria, come il colore o la posizione degli oggetti, ed è rappresentata direttamente dall'attività di singoli, specifici neuroni del lobo parietale.



Evoluzionismo e Neuroscienze

G. Vallortigara in *Cervelli che contano* (2014)

[...] se gli enti matematici, come il numero, sono il prodotto dei cervelli – e, perciò da questo punto di vista, sono parte integrante del mondo fisico – l'efficacia della matematica nella spiegazione del mondo fisico perde ogni alone di mistero [...]

Le strutture del sistema nervoso incarnano, letteralmente, la struttura dell'ambiente in cui si sono evolute.



Alcune letture

- 1 Carlo Cellucci: *La filosofia della matematica del Novecento*. Laterza, (2007)
- 2 Jean-Pierre Changeux, Alain Connes: *Pensiero e Materia*. Bollati Boringhieri, (1991)
- 3 George Lakoff, Rafael E. Nunez: *Where Mathematics Comes From*. Basic Books, (2000)
- 4 Gabriele Lolli: *Filosofia della Matematica - L'eredità del novecento*. Il Mulino, (2002)
- 5 Jules-Henri Poincaré: *La Scienza e l'ipotesi*. Ediz. Varie, (1902)
- 6 Eugene P. Wigner: *L'irragionevole efficacia della matematica nelle scienze naturali*. Adelphi, (2017)
- 7 Giorgio Vallortigara, Nicla Panciera: *Cervelli che contano*. Adelphi, (2014)



