# Elementi di topologia in $\mathbb{R}^n$

Raul Paolo Serapioni

Analisi Matematica A – Secondo modulo
Corso di Laurea in Matematica
Università di Trento

*Lezione 15*

$$\mathbb{R}^n := \{\mathbf{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : x_i \in \mathbb{R}\}.$$

Per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ sono definite le operazioni

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \qquad \lambda\mathbf{x} := \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

*Vedi: Cap 3: par 1.1, 1.2, 1.4, 2.1*

La *base canonica* di $\mathbb{R}^n$ è la famiglia di vettori

$$\mathbf{e}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \mathbf{e}_n := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Quindi

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i$$

Per $n = 2$ o $n = 3$ spesso si usano anche le notazioni

$$\mathbb{R}^2 := \{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R}\} = \{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

in cui abbiamo definito la *base canonica*

$$\mathbf{i} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{j} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\mathbb{R}^3 := \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R}\} = \{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} : x, y \in \mathbb{R}\}$, con

*base canonica*: $\mathbf{i} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{j} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

### *Definizione:*

Se $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ il loro prodotto scalare è definito:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

### Proprietà del prodotto scalare

($S1$): $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0 \quad \text{e} \quad \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \implies \mathbf{x} = \mathbf{0}$;

($S2$): $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$;

($S3$): $\langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$;

($S4$): $\langle \lambda \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \qquad$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$;

### *Definizione:*

Se $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^\mathbf{n}$ la norma euclidea di $\mathbf{x}$ è

$$\|\mathbf{x}\| := \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = \left( \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2}$$

### Proprietà della norma:

$(N1)$: $\|\mathbf{x}\| \geq 0$ e $\|\mathbf{x}\| = 0 \implies \mathbf{x} = \mathbf{0}$;

$(N2)$: $\|\lambda \mathbf{x}\| = |\lambda| \; \|\mathbf{x}\|$;

$(N3)$: $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$.

# Lo spazio $\mathbb{C}^n$

$$\mathbb{C}^n := \{\mathbf{z} := \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} : z_i \in \mathbb{R}\}$$

è uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{C}$ con le operazioni

$$\mathbf{z} + \mathbf{w} := \begin{pmatrix} z_1 + w_1 \\ \vdots \\ z_n + w_n \end{pmatrix}, \qquad \lambda\mathbf{z} := \begin{pmatrix} \lambda z_1 \\ \vdots \\ \lambda w_n \end{pmatrix}$$

# Lo spazio $\mathbb{C}^n$

## Prodotto scalare (hermitiano) in $\mathbb{C}^n$

Se $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$ e $\mathbf{w} \in \mathbb{C}^n$ il loro prodotto scalare $\in \mathbb{C}$ ed è definito:

$$\langle \mathbf{z}, \mathbf{w} \rangle := \sum_{i=1}^{n} z_i \bar{w}_i.$$

Le proprietà del prodotto hermitiano sono:

$(H1)$: $\langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle \geq 0, \qquad \langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle = 0 \implies \mathbf{z} = \mathbf{0};$

$(H2)$: $\langle \mathbf{z}, \mathbf{w} \rangle = \overline{\langle \mathbf{w}, \mathbf{z} \rangle};$

$(H3)$: $\langle \mathbf{z} + \mathbf{w}, \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{z}, \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{w}, \mathbf{u} \rangle;$

$(H4)$: $\langle \lambda \mathbf{z}, \mathbf{w} \rangle = \lambda \langle \mathbf{z}, \mathbf{w} \rangle \qquad$ per $\lambda \in \mathbb{C};$

### Teorema: disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

Se $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ allora

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \ \|\mathbf{y}\| \, .$$

*Traccia di dimostrazione:*

Per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$

$$0 \leq \langle \mathbf{x} - \lambda \mathbf{y}, \mathbf{x} - \lambda \mathbf{y} \rangle = \|\mathbf{x}\|^2 - 2\lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \lambda^2 \|\mathbf{y}\|$$

e quindi

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^2 - \|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{y}\|^2 \leq 0.$$

## Angolo fra due vettori $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$

L'angolo $\theta$, fra due vettori $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ è definito da

$$-\pi < \theta \leq \pi : \qquad \cos\theta := \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{x}\| \; \|\mathbf{y}\|}.$$

## Vettori ortogonali e "teorema di Pitagora"

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0 \implies \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 .$$

**Definizione:**

Se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{\mathbf{n}}$ la distanza euclidea $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ fra $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ è il numero non negativo:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \left( \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2} .$$

**Proprietà della distanza.**

$(D1)$: $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0, \qquad d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \implies \mathbf{x} = \mathbf{y};$

$(D2)$: $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x});$

$(D3)$: $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d(\mathbf{z}, \mathbf{y}).$

*Definizione:*

Se $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$ si definisce intorno sferico $B(\mathbf{x}, r)$ di $\mathbf{x}$ di raggio $r$ l'insieme

$$B(\mathbf{x}, r) := \{\mathbf{y} : d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < r\}$$

Proprietà degli intorni (sferici)

($U1$): ogni $\mathbf{x}$ ha almeno un intorno $B(\mathbf{x}, r)$ e $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}, r)$;

($U2$): ogni intersezione $B(\mathbf{x}, r_1) \cap B(\mathbf{x}, r_2)$ di due intorni di $\mathbf{x}$ contiene un intorno di $\mathbf{x}$;

($U3$): per ogni $\mathbf{y} \in B(\mathbf{x}, r)$ esiste $s > 0$ tale che $B(\mathbf{y}, s) \subset B(\mathbf{x}, r)$;

($U4$): per ogni coppia $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ esistono $r_1 > 0$ e $r_2 > 0$ tali che $B(\mathbf{x}, r_1) \cap B(\mathbf{y}, r_2) = \emptyset$.

## Definizione di limite di una successione a valori in $\mathbb{R}^n$

Se $(\mathbf{x}_n)_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ è una successione e $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ diciamo che

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{v}$$

se:
per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} = \bar{n}(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n > \bar{n}$ è vero che $\mathbf{x}_n \in B(\mathbf{v}, \varepsilon)$.

**Definizione 2.1:**

Sia $E \subset \mathbb{R}^n$

- $\mathbf{x}$ si dice *punto interno* di $E$ se esiste un $r > 0$ tale che $B(\mathbf{x}, r)$ sia contenuto in $E$;
- $\mathbf{x}$ si dice *punto esterno* di $E$ se $\mathbf{x}$ è un punto interno di $\complement E$;
- $\mathbf{x}$ si dice *punto di frontiera* di $E$ se non è né punto interno né punto esterno di $E$.

*Osservazione:* fissato un qualsiasi insieme $E \subset \mathbb{R}^n$ ogni punto di $\mathbb{R}^n$ è o interno ad $E$, o esterno ad $E$ o di frontiera per $E$.

## Definizione 2.2

$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ è un *punto di accumulazione* di $E$ se in ogni intorno $B(\mathbf{x}, r)$ esiste almeno un punto di $E$ diverso da $\mathbf{x}$.

**Definizione 2.3:**

Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ allora

- $E$ è aperto in $\mathbb{R}^n$ se ogni suo punto è un punto interno di $E$;
- $E$ è chiuso in $\mathbb{R}^n$ se $\mathcal{C}E$ è aperto in $\mathbb{R}^n$.

**Osservazione:**

- $\emptyset$ è aperto in $\mathbb{R}^n$ (per definizione);
- Poiché $\mathbb{R}^n$ è aperto segue che $\emptyset$ è anche chiuso;
- $\emptyset$ e $\mathbb{R}^n$ sono gli unici insiemi di $\mathbb{R}^n$ che sono aperti e chiusi.

**Teorema:**

Gli insiemi chiusi contengono i propri punti di accumulazione.

*Prova:* Se $E$ è chiuso e se $\mathbf{x} \in \complement E$ allora $\mathbf{x}$ è un punto interno di $\complement E$ e quindi non è di accumulazione per $E$. $\square$

## Examples

- $(a,b)$, $(a,+\infty)$, $\mathbb{R}$ sono aperti in $\mathbb{R}$;
- $[a,b]$, $[a,+\infty)$, $\mathbb{R}$ sono chiusi in $\mathbb{R}$;
- $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ è chiuso in $\mathbb{R}^2$;
- $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ è aperto in $\mathbb{R}^2$;
- $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : 0 < x_1 < 1, x_2 = 0\}$ non è aperto nè chiuso in $\mathbb{R}^2$;
- $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x_1 \leq 1, x_2 = 0\}$ è chiuso in $\mathbb{R}^2$;

## Teorema su unione/intersezione di famiglie di aperti e chiusi

Se $A_\alpha$ è una famiglia di insiemi aperti allora

$$\bigcup_{\alpha} A_\alpha \quad \text{e} \quad \bigcap_{\alpha_1,\dots,\alpha_n} A_{\alpha_i} \qquad \text{sono insiemi aperti.}$$

Se $C_\alpha$ è una famiglia di insiemi chiusi allora

$$\bigcap_{\alpha} C_\alpha \quad \text{e} \quad \bigcup_{\alpha_1,\dots,\alpha_n} C_{\alpha_i} \qquad \text{sono insiemi chiusi.}$$

## Definizione:

Sia $E \subset \mathbb{R}^n$.

- l'interno di $E$ è l'insieme dei punti interni di $E$;
- la frontiera di $E$ indicata con $\partial E$ è l'insieme dei punti di frontiera di $E$;
- la chiusura di $E$ indicata come $\overline{E}$ è definita come

$$\overline{E} := E \cup \partial E$$

.

## Teorema: una caratterizzazione degli insiemi chiusi

Le tre affermazioni seguenti sono equivalenti:

1. $E$ è chiuso;
2. $\partial E \subset E$;
3. ogni punto di accumulazione di $E$ è un punto di $E$.

*Cenno di prova:*

- (1) $\implies$ (2) e (1) $\implies$ (3) sono provati nelle osservazioni.
- (2) $\implies$ (1): se $\partial E \subset E$ allora tutti i punti di $\complement E$ sono punti interni di $\complement E$ che quindi è un aperto.

$\square$