Successioni e sottosuccessioni
Insiemi compatti per successione in $\mathbb{R}^n$

Raul Paolo Serapioni

Analisi Matematica A – Secondo modulo
Corso di Laurea in matematica
Università di Trento

Lezione 16

Teorema: (di Bolzano-Weierstrass)

Ogni $E \subset \mathbb{R}^n$, limitato e infinito, ha almeno un punto di accumulazione.

- E limitato vuol dire che esiste $R > 0$ tale che $E \subset B(0, R)$.
- E infinito vuol dire che E ha infiniti punti.

Traccia di dimostrazione:
Si costruisce una successione di intervalli inscatolati, ciascuno contenente infiniti punti di E e la cui intersezione è un singolo punto. Tale punto è il punto di accumulazione cercato. $\square$

Definizione

Sia $(\mathbf{a}_h)_h : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ una successione.

Diciamo che $(\mathbf{s}_k)_k : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ è una sotto-successione di $(\mathbf{a}_h)_h$ se

$$\mathbf{s}_k = \mathbf{a}_{h_k}, \qquad \text{per } k = 1, 2, \dots$$

dove $k \mapsto h_k$ è una successione strettamente crescente di numeri naturali.

Corollario (di Bolzano-Weierstrass)

Sia $(\mathbf{x}_n)_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$.
Se $(\mathbf{x}_n)_n$ è limitata allora esiste una sotto-successione $(\mathbf{x}_{n_i})_i$ convergente.

Traccia di dimostrazione:

- *Se l'immagine di $(\mathbf{x}_n)_n$ è un insieme finito* allora esiste una sotto-successione costante e quindi convergente.
- *Se l'immagine di $(\mathbf{x}_n)_n$ è un insieme infinito* allora, per il teorema di Bolzano-Weierstrass, esiste un suo punto di accumulazione e si può costruire una sotto-successione convergente a tale punto di accumulazione.

Definizione

Sia $(\mathbf{x}_h)_h : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$.

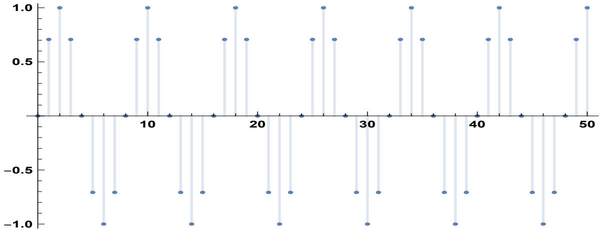
- $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ è un valore limite di $(\mathbf{x}_h)_h$ se esiste una sotto-successione $(\mathbf{s}_k)_k$ tale che

$$\mathbf{v} = \lim_{k \to +\infty} \mathbf{s}_k.$$

- La classe limite di $(\mathbf{x}_h)_h$ è il sottoinsieme di $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ formato da tutti i valori limite di $(\mathbf{x}_h)_h$.

Example

$(a_n)_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definita da $a_n := \sin(\frac{n\pi}{4})$



- $\lim_{i\to+\infty} a_{4i} = 0, \quad \lim_{i\to+\infty} a_{8i+1} = \sqrt{2}/2, \ldots$
- La classe limite di $(a_n)_n$ è $\{1, \sqrt{2}/2, 0, -\sqrt{2}/2, -1\}$

Osservazione

Sia $(\mathbf{x}_h)_h : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$.

- La classe limite di $(\mathbf{x}_h)_h$ è non vuota.
- Se
$$\mathbf{v} = \lim_{h \to +\infty} \mathbf{x}_h$$
allora ogni sotto-successione $(\mathbf{x}_{h_k})_k$ ha limite $\mathbf{v}$ e la classe limite è $\{\mathbf{v}\}$.
- La classe limite di $(\mathbf{x}_h)_h$ è un insieme chiuso in $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$.

Definizione

Sia $(a_h)_h : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

- Si dice limite superiore o massimo limite di $(a_h)_h$ il massimo della classe limite (eventualmente $+\infty$)

$$\limsup_{h\to+\infty} a_h = \max \lim_{h\to+\infty} a_h = \overline{\lim}_{h\to+\infty} a_h$$

- Si dice limite inferiore o minimo limite di $(a_h)_h$ il minimo della classe limite (eventualmente $-\infty$)

$$\liminf_{h\to+\infty} a_h = \min \lim_{h\to+\infty} a_h = \underline{\lim}_{h\to+\infty} a_h$$

Osservazione

Sia $(a_h)_h : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

- $\liminf_{h\to+\infty} a_h$ e $\limsup_{h\to+\infty} a_h$ esistono sempre e
$$-\infty \leq \liminf_{h\to+\infty} a_h \leq \limsup_{h\to+\infty} a_h \leq +\infty.$$
- Se
$$\liminf_{h\to+\infty} a_h = \limsup_{h\to+\infty} a_h$$
allora esiste $\lim_{h\to+\infty} a_h$ e
$$\lim_{h\to+\infty} a_h = \liminf_{h\to+\infty} a_h = \limsup_{h\to+\infty} a_h.$$

Definizione

$(\mathbf{a}_h)_h : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ si dice successione fondamentale o successione di Cauchy se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N > 0$ tale che

$$h, k > N \implies \|\mathbf{a}_h - \mathbf{a}_k\| < \varepsilon.$$

Teorema (Criterio di convergenza di Cauchy)

Sono equivalenti

1. esiste $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ tale che
$$\lim_{h \to +\infty} \mathbf{a}_h = \mathbf{v};$$
2. $(\mathbf{a}_h)_h$ è una successione fondamentale.

Traccia di prova:

- ($1 \implies 2$): Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N = N(\varepsilon)$ tale che per $n > N$ vale $\|\mathbf{a}_n - \mathbf{v}\| < \varepsilon$. Quindi, per $n, m > N$

$$\|\mathbf{a}_n - \mathbf{a}_m\| \leq \|\mathbf{a}_n - \mathbf{v}\| + \|\mathbf{a}_m - \mathbf{v}\| < 2\varepsilon.$$

- ($2 \implies 1$):
  1. $(\mathbf{a}_h)_h$ fondamentale implica $(\mathbf{a}_h)_h$ limitata;
  2. $(\mathbf{a}_h)_h$ limitata implica che esiste una sotto-successione $(\mathbf{a}_{h_i})_i$ convergente (si utilizza il Corollario del Teorema di Bolzano-Weierstrass);
  3. $(\mathbf{a}_h)_h$ fondamentale implica che tutta la successione $(\mathbf{a}_h)_h$ converge al limite della sotto-successione $(\mathbf{a}_{h_i})_i$.

Definizione

$K \subset \mathbb{R}^n$ si dice *sequenzialmente compatto* (o *compatto per successioni*) se ogni successione $(\mathbf{x}_n)_n$ di punti di K contiene una sotto-successione $(\mathbf{x}_{n_h})_h$ convergente ad un punto di K.

Teorema (di Heine-Borel)

Sia $K \subset \mathbb{R}^n$. Le seguenti proprietà sono equivalenti:

1. K è sequenzialmente compatto;
2. K è chiuso e limitato.

Traccia di Prova:

- (2) $\implies$ (1) Denotiamo $\mathbf{y} := \lim_{i \to +\infty} \mathbf{x}_{n_i}$. Se $\mathbf{y} \notin E$ allora $\mathbf{y}$ è un punto interno al complementare di E, perchè il complementare è aperto. Quindi esiste un intorno di $\mathbf{y}$ tutto contenuto in $\mathcal{C}E$ e quindi $\mathbf{y}$ non può essere il limite di una successione in E.
- (1) $\implies$ (2): per assurdo. Se K non è chiuso esiste almeno un punto $\bar{\mathbf{x}} \in \partial K$ ma non appartenente a K. $\bar{\mathbf{x}}$ è un punto di accumulazione di K. Esiste quindi una successione $(\mathbf{s}_n)_n$ a valori in K convergente a $\bar{\mathbf{x}}$. Tutte le sotto-successioni di $(\mathbf{s}_n)_n$ convergono a $\bar{\mathbf{x}}$ e quindi non esistono sotto-successioni convergenti a un elemento di K. Se K non è limitato si costruisce una successione in K con norma divergente a $+\infty$.

Teorema (Caratterizzazione di $\overline{E}$)

Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Allora sono equivalenti:

- $\mathbf{y}$ appartiene alla chiusura $\overline{E}$ di E
- esiste una successione $(\mathbf{s}_n)_n \subset E$ tale che

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbf{s}_n = \mathbf{y}$$

Corollario

Sia $E \subset \mathbb{R}^n$. Allora sono equivalenti:

- E è chiuso
- se $(\mathbf{s}_n)_n \subset E$ e $(\mathbf{s}_n)_n$ è convergente allora:

$$\lim_{n\to+\infty} (\mathbf{s}_n)_n \in E.$$

Definizione generale di compattezza

$K \subset \mathbb{R}^n$ si dice *compatto* se ogni ricoprimento aperto di K contiene un sotto-ricoprimento finito.

La frase precedente ha il seguente significato: data una qualsiasi famiglia A_α di sottoinsiemi aperti di $\mathbb{R}^n$ tali che

$$K \subset \bigcup_\alpha A_\alpha$$

allora esiste una sottofamiglia finita $A_{\alpha_1}, \ldots, A_{\alpha_N}$ tale che

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{N} A_{\alpha_i}.$$

Definizione

$C \subset \mathbb{R}^n$ si dice *convesso* se:
per ogni coppia di punti $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ in C, $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ sono estremi di un *segmento* tutto contenuto in C.

Definizione

$C \subset \mathbb{R}^n$ si dice *connesso per segmenti* se:
per ogni coppia di punti $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ in C, $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ sono estremi di una *spezzata* tutta contenuta in C.

Definizione (Notazione frequente)

$$\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$$

$$\dot{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty\}, \qquad \dot{\mathbb{R}}^n := \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}.$$

- $\mathbb{R}^*$, $\dot{\mathbb{R}}$ e $\dot{\mathbb{R}}^n$ sono sequenzialmente compatti. Infatti ogni successione
  se è limitata ha una sotto-successione convergente,
  se è illimitata ha una sotto-successione divergente a $\pm\infty$ o a ∞.