Limiti e continuità per funzioni $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Raul Paolo Serapioni

Analisi Matematica A – Secondo modulo
Corso di Laurea in Matematica
Università di Trento

Lezione 17

Definizione

- $X \subset \mathbb{R}^2, \quad f : X \to \mathbb{R}$
- $\mathbf{x}_0$ punto di accumulazione di X, $\quad \ell \in \mathbb{R}$

Diciamo che

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \ell$$

se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tale che

$$\mathbf{x} \in (X \cap B(\mathbf{x}_0, \delta)) \setminus \{\mathbf{x}_0\} \implies |f(\mathbf{x}) - \ell| < \varepsilon.$$

Definizione

- $X \subset \mathbb{R}^2, \quad f : X \to \mathbb{R}$
- $\mathbf{x}_0$ punto di accumulazione di X

Diciamo che

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = +\infty$$

se per ogni $M \in \mathbb{R}$ esiste $\delta = \delta(M) > 0$ tale che

$$\mathbf{x} \in (X \cap B(\mathbf{x}_0, \delta)) \setminus \{\mathbf{x}_0\} \implies f(\mathbf{x}) > M.$$

Definizione

- $X \subset \mathbb{R}^2, \quad f : X \to \mathbb{R},$
- X illimitato, $\quad \ell \in \mathbb{R}$.

Diciamo che

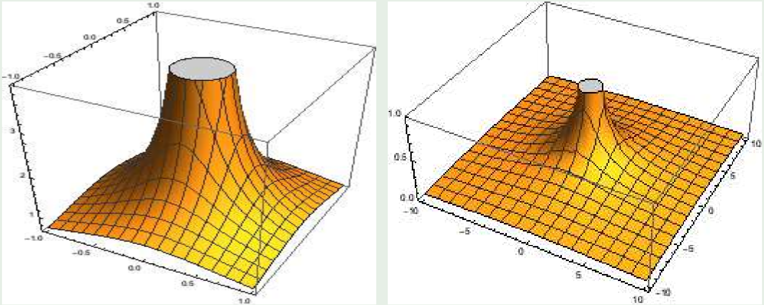
$$\lim_{\mathbf{x}\to\infty} f(\mathbf{x}) = \ell$$

se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N = N(\varepsilon) > 0$ tale che

$$\mathbf{x} \in X \text{ e } \|\mathbf{x}\| > N \implies |f(\mathbf{x}) - \ell| < \varepsilon.$$

Example

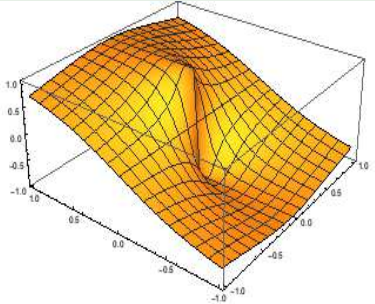
Parte del grafico di $f(\mathbf{x}) := \frac{1}{\|\mathbf{x}\|} = \frac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}$ a due scale differenti

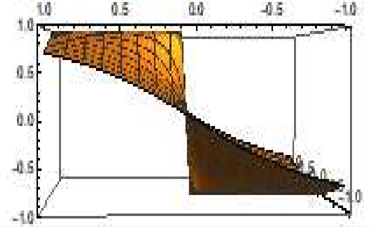


$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}} \frac{1}{\|\mathbf{x}\|} = +\infty; \qquad \lim_{\mathbf{x}\to\infty} \frac{1}{\|\mathbf{x}\|} = 0.$$

Example

Parte del grafico di $f(\mathbf{x}) := \frac{x_1}{\|\mathbf{x}\|}$ visto da prospettive differenti





$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}} \frac{x_1}{\|\mathbf{x}\|} \text{ non esiste;} \qquad \lim_{\mathbf{x}\to\infty} \frac{x_1}{\|\mathbf{x}\|} \text{ non esiste;}$$

Le definizioni per funzioni di n variabili sono analoghe:

Definizione

Sia $X \subset \mathbb{R}^n, \quad f : X \to \mathbb{R}$

- se $\mathbf{x}_0$ punto di accumulazione di X e $\ell \in \mathbb{R}$, diciamo che $\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \ell$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tale che
$$\mathbf{x} \in (X \cap B(\mathbf{x}_0, \delta)) \setminus \{\mathbf{x}_0\} \implies |f(\mathbf{x}) - \ell| < \varepsilon;$$
- se X illimitato, $\ell \in \mathbb{R}$, diciamo che $\lim_{\mathbf{x} \to \infty} f(\mathbf{x}) = \ell$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N = N(\varepsilon) > 0$ tale che
$$\mathbf{x} \in X \text{ e } \|\mathbf{x}\| > N \implies |f(\mathbf{x}) - \ell| < \varepsilon;$$
- ...

Teorema: una caratterizzazione del limite

Sia $X \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}_0$ di accumulazione per X, $f : X \to \mathbb{R}$.

Sono equivalenti

1. per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tale che
$$\mathbf{x} \in (X \cap B(\mathbf{x}_0, \delta)) \setminus \{\mathbf{x}_0\} \implies |f(\mathbf{x}) - \ell| < \varepsilon.$$
2. per ogni successione $(\mathbf{s}_n)_n$ a valori in $X \setminus \{\mathbf{x}_0\}$
$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{s}_n = \mathbf{x}_0 \implies \lim_{n\to\infty} f(\mathbf{s}_n) = \ell.$$

Traccia di prova:

1 $\implies$ 2 Fissato $\varepsilon > 0$ esiste $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tale che

$$f((X \cap B(\mathbf{x}_0, \delta)) \setminus \{\mathbf{x}_0\}) \subset (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon).$$

Se $\lim_{n \to +\infty} \mathbf{s}_n = \mathbf{x}_0$ allora $\mathbf{s}_n \in (X \cap B(\mathbf{x}_0, \delta)) \setminus \{\mathbf{x}_0\}$ definitivamente per $n \to +\infty$.
Quindi $f(\mathbf{s}_n) \in (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$ definitivamente per $n \to +\infty$.

2 $\implies$ 1 *Per assurdo.* Se è falso che $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ allora esiste $\varepsilon > 0$ tale che in ogni intorno $B(\mathbf{x}_0, 1/n)$ esiste almeno un $\mathbf{s}_n \neq \mathbf{x}_0$ tale che $f(\mathbf{s}_n) \notin (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$.
Quindi esiste $(\mathbf{s}_n)_n$ tale che $\lim_{n \to +\infty} \mathbf{s}_n = \mathbf{x}_0$ ma non $\lim_{n \to +\infty} f(\mathbf{s}_n) = \ell$.

Osservazione

Se $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $n > 1$ i "limiti direzionali" perdono importanza.

Example

Sia $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x,y) := \frac{xy^2}{x^2+y^4}$.

- Per ogni $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ esiste il limite "direzionale" lungo la semiretta $t \mapsto t\mathbf{v}$, $t > 0$ ed è sempre zero, infatti

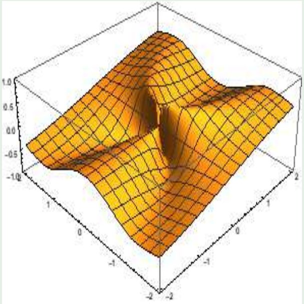
$$\lim_{t\to 0^+} f(tv_1, tv_2) = \lim_{t\to 0^+} \frac{t^3 v_1 v_2^2}{t^2 v_1^2 + t^4 v_2^4} = 0,$$

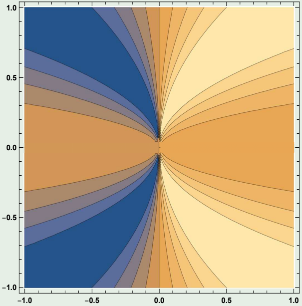
- ma $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ non esiste . Infatti
  - se $\mathbf{s}_n := (\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n})$ allora $\lim_{n\to+\infty} f(\mathbf{s}_n) = \frac{1}{2}$;
  - se $\mathbf{s}_n := (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ allora $\lim_{n\to+\infty} f(\mathbf{s}_n) = 0$.

Example

Parte di grafico e linee di livello di f

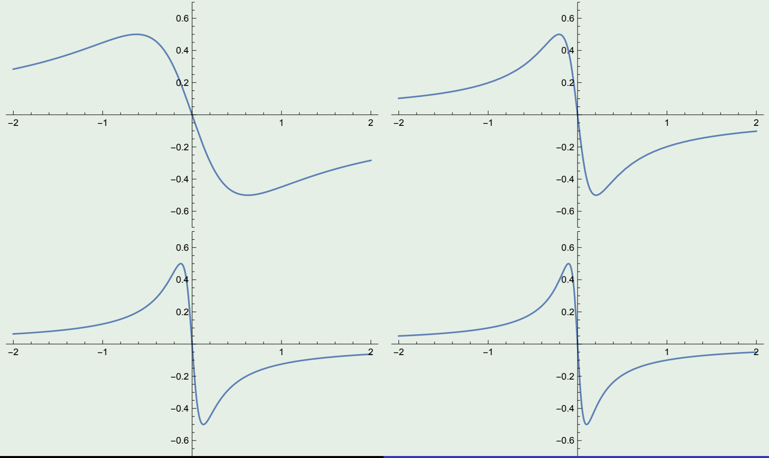
$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) := \frac{xy^2}{x^2+y^4}$$





Example

Alcune sezioni del grafico della funzione precedente in cui si vede che lungo ogni sezione la funzione ha limite $= 0$ per $x \to 0$.



Due definizioni equivalenti di continuità di una funzione:

Definizione

$f : E(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ è continua in $\mathbf{x}_0 \in E$

- se $\mathbf{x}_0$ è un punto isolato di E, oppure
- se $\mathbf{x}_0$ è un punto di accumulazione di E e

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0).$$

Definizione

$f : E(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ è continua in $\mathbf{x}_0 \in E$ se

per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $B(\mathbf{x}_0, \delta)$ tale che

$$f\left(E \cap B(\mathbf{x}_0, \delta)\right) \subset \left(f(\mathbf{x}_0) - \varepsilon, f(\mathbf{x}_0) + \varepsilon\right).$$

Definizione

$f : E(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ è continua in E se f è continua in ogni punto $\mathbf{x} \in E$.

Teorema

$\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è continua in $\mathbb{R}^n$
se e solo se
per ogni intervallo aperto (a, b), la controimmagine $\mathbf{f}^{-1}((a, b))$ è un aperto di $\mathbb{R}^n$.

Sono funzioni continue

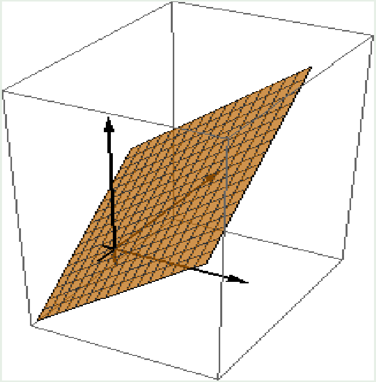
- le funzioni lineari (e affini);
- i polinomi;
- le funzioni razionali nel loro dominio di definizione;
- la composizione di una funzioni continua $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e di una funzione continua $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sono continue allora

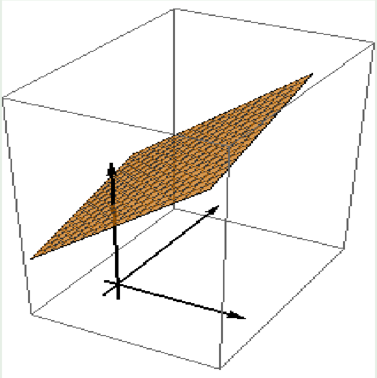
$$\phi(f(\mathbf{x})) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \qquad \text{è continua.}$$

- ...

Example

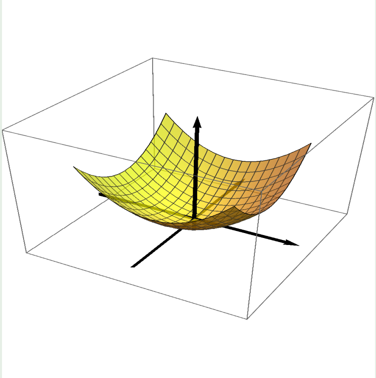
Grafici di $(x, y) \mapsto x + y$ e di $(x, y) \mapsto 1 + x + y/2$.

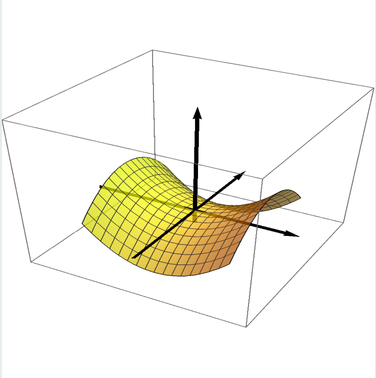




Example

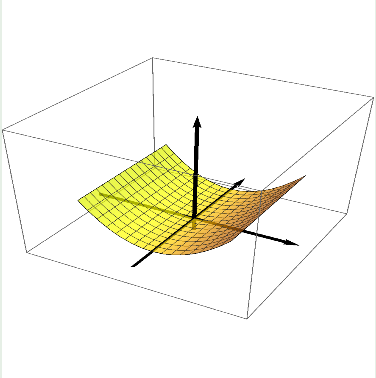
Grafici di $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ e di $(x, y) \mapsto x^2 - y^2$.

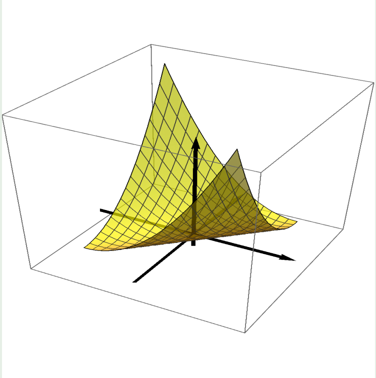




Example

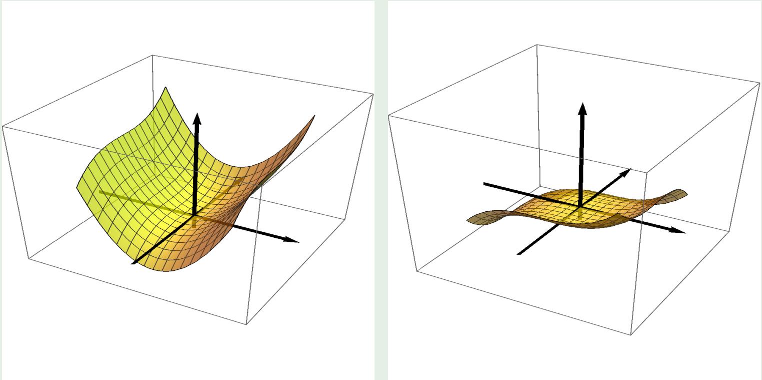
Grafici di $(x, y) \mapsto x^2$ e di $(x, y) \mapsto (x - y)^2$.





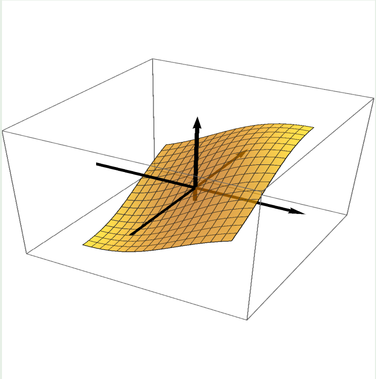
Example

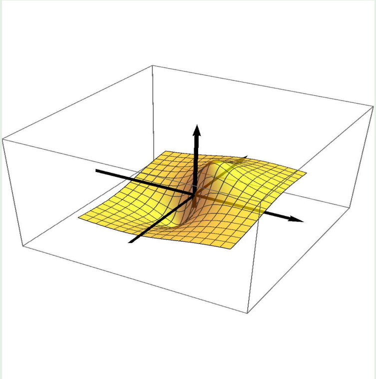
Grafici di $(x, y) \mapsto 2x^2 + y^3$ e di $(x, y) \mapsto x^3 - y^3$.



Example

Grafici di $(x, y) \mapsto \frac{x+y}{1+x^2+y^2}$ e di $(x, y) \mapsto \frac{4x+4y}{1+(6x)^2+(6y)^2}$.





Teorema di Weierstrass

Siano

- K un sottoinsieme chiuso e limitato (compatto) di $\mathbb{R}^n$,
- $\mathbf{f} : K \to \mathbb{R}$ una funzione continua in K.

Allora $\mathbf{f}(K)$ è chiuso e limitato (compatto).

Traccia di prova.
Gli insiemi chiusi e limitati sono *compatti per successioni*.
Sia $(\mathbf{y}_n)_n$ una successioni di punti in $\mathbf{f}(K)$, proviamo che esiste una sotto-successione $(\mathbf{y}_{n_h})_h$ convergente a un elemento di $\mathbf{f}(K)$. Sia $(\mathbf{x}_n)_n$ una successione contenuta in K di contro-immagini di $\mathbf{y}_n$. Poiché K è compatto per successioni, esiste una sotto-successione $(\mathbf{x}_{n_h})_h$ convergente a $\bar{\mathbf{x}} \in K$. Poiché $\mathbf{f}$ è continua $\mathbf{f}(\mathbf{x}_{n_h})$ converge a $\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}})$ e quindi $(\mathbf{y}_{n_h})_h$ converge a $\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}})$. $\square$

Osservazione

Se C è un sottoinsieme chiuso e limitato di $\mathbb{R}$ allora esistono il massimo e il minimo di C.

Traccia di prova

- C limitato implica che $\sup C < +\infty$;
- se $\sup C$ non è un punto di accumulazione di C allora $\sup C \in C$ e quindi è un massimo;
- se $\sup C$ è un punto di accumulazione di C allora $\sup C \in C$ perchè C è un chiuso e quindi contiene i propri punti di accumulazione.

Analogamente per $\inf C$. $\square$

Teorema (Weierstrass di esistenza di massimo e minimo)

1. Se K è un sottoinsieme chiuso e limitato di $\mathbb{R}^n$,
2. se $f : K \to \mathbb{R}$ è una funzione continua in K

allora f ha massimo e minimo su K.

$X \subset \mathbb{R}^n$, $f : X \to \mathbb{R}$ e x_0 un punto di accumulazione di X.

- $\ell \in \mathbb{R}^*$ è un valore limite di f per $x \to x_0$ se esiste $(s_n)_n$ a valori in $X \setminus \{x_0\}$ tale che $\lim_{n\to+\infty} s_n = x_0$ e
$$\lim_{n\to\infty} f(s_n) = \ell.$$
- la classe limite di f per $x \to x_0$ è l'insieme dei valori limite;
- il massimo limite e il minimo limite sono il massimo e il minimo della classe limite per $x \to x_0$
$$\limsup_{x\to x_0} f(x), \qquad \liminf_{x\to x_0} f(x).$$

$X \subset \mathbb{R}^n$, $f : X \to \mathbb{R}$ e x_0 un punto di accumulazione di X.

- la classe limite è sempre non vuota ed è un chiuso;
- esistono sempre $\liminf_{x \to x_0} f(x)$ e $\limsup_{x \to x_0} f(x)$ e
$$-\infty \le \liminf_{x \to x_0} f(x) \le \limsup_{x \to x_0} f(x) \le +\infty$$
- se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ allora ℓ è un valore limite e la classe limite è $\{\ell\}$;
- $$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \iff \liminf_{x \to x_0} f(x) = \limsup_{x \to x_0} f(x) = \ell.$$