Continuità uniforme
Calcolo differenziale in più variabili

Raul Paolo Serapioni

Analisi Matematica A – Secondo modulo
Corso di Laurea in Matematica
Università di Trento

Lezione 18

Definizione

$f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è uniformemente continua in E se

$$\text{per ogni } \varepsilon > 0 \ \text{ esiste } \delta > 0 : \ \text{ tale che}$$
$$\text{per ogni } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E,$$
$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \delta \implies |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| < \varepsilon.$$

Example

- *Esempio 1.17:* La funzione $x \mapsto x^2$ è uniformemente continua in $[0,1]$.
- La funzione $x \mapsto x^2$ non è uniformemente continua in $\mathbb{R}$.
- *Esempio 1.18:* La funzione $x \mapsto \frac{1}{x}$ è continua, ma non è uniformemente continua in $(0,1)$.
- *Esempio 1.20:* la funzione $x \mapsto e^{-x}$ è uniformemente continua in $[0,+\infty)$.

Teorema: (di Cantor-Heine)

Se

1. $K \subset \mathbb{R}^n$ è chiuso e limitato,
2. $f : K \to \mathbb{R}$ è continua in K

allora f è uniformemente continua in K.

Traccia di prova. Per assurdo.
La negazione della tesi è

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in K : \ \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \delta \text{ e } |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| \geq \varepsilon.$$

Se $\varepsilon > 0$ è tale che la precedente vale, allora per ogni $\delta = \frac{1}{n}$ esistono $\mathbf{x}_n$ e $\mathbf{y}_n$ in K tali che

$$\|\mathbf{x}_n - \mathbf{y}_n\| < \frac{1}{n} \quad \text{e} \quad |f(\mathbf{x}_n) - f(\mathbf{y}_n)| \geq \varepsilon.$$

Poiché K è compatto per successioni, esistono due sottosuccessioni $(\mathbf{x}_{n_h})_h$ e $(\mathbf{y}_{n_h})_h$ convergenti.
Poiché $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{y}_n\| < \frac{1}{n}$, $(\mathbf{x}_{n_h})_h$ e $(\mathbf{y}_{n_h})_h$ convergono al medesimo $\bar{\mathbf{x}} \in K$.
Poiché f è continua: $\lim_{h \to +\infty} f(\mathbf{x}_{n_h}) = f(\bar{\mathbf{x}}) = \lim_{h \to +\infty} f(\mathbf{y}_{n_h})$ quindi

$$\lim_{h \to +\infty} (f(\mathbf{x}_{n_h}) - f(\mathbf{y}_{n_h})) = 0.$$

Questo è in contrasto con la disuguaglianza $|f(\mathbf{x}_n) - f(\mathbf{y}_n)| \geq \varepsilon$. □

Corollario

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a, b]$, allora f è uniformemente continua in $[a, b]$.

Teorema

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a, b]$, allora f è Riemann integrabile in $[a, b]$.

Traccia di prova.
Si utilizza il criterio, necessario e sufficiente, di integrabilità: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è Riemann integrabile se e solo se $\forall \varepsilon > 0$ esiste una partizione $\mathcal{P}_\varepsilon$ di $[a,b]$ tale che $\mathcal{S}(f, \mathcal{P}_\varepsilon) - s(f, \mathcal{P}_\varepsilon) < \varepsilon$.

Assegnato $\varepsilon > 0$ si utilizza l'uniforme continuità di f in $[a,b]$, (Teorema di Cantor-Heine), per costruire una partizione $\mathcal{P}_\varepsilon$ di $[a,b]$ tale che su ogni intervallo della partizione sia,

$$\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) - \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) \le \varepsilon. \quad \text{Allora:}$$

$$\mathcal{S}(f, \mathcal{P}_\varepsilon) - s(f, \mathcal{P}_\varepsilon) = \sum_{i=1}^{N} \left(\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) - \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) \right) (x_i - x_{i-1})$$

$$\le \varepsilon \sum_{i=1}^{N} (x_i - x_{i-1}) = \varepsilon(b-a).$$

Quindi la differenza fra somma superiore e somma inferiore è $< \varepsilon$ pur di scegliere una opportuna partizione di $[a,b]$.

Definizione (in $\mathbb{R}^2$)

Sia $A \subset \mathbb{R}^2$ aperto, $f : A \to \mathbb{R}$,
$\mathbf{x} := (x, y) \in A$ e $\mathbf{v}$ un *versore* in $\mathbb{R}^2$.

La derivata direzionale $D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x})$ di f in $\mathbf{x}$ è

$$D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}) := \lim_{t \to 0} \frac{f(\mathbf{x} + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{x})}{t}.$$

Le derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ di f in (x, y) sono

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x}) := \lim_{t \to 0} \frac{f(\mathbf{x} + t\mathbf{e}_1) - f(\mathbf{x})}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + t, y) - f(x, y)}{t},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}) := \lim_{t \to 0} \frac{f(\mathbf{x} + t\mathbf{e}_2) - f(\mathbf{x})}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x, y + t) - f(x, y)}{t},$$

in tutti i casi, se i limiti esistono finiti.

Definizione (in $\mathbb{R}^3$)

$A \subset \mathbb{R}^3$ aperto, $f : A \to \mathbb{R}$, $\mathbf{x} := (x, y, z) \in A$ e $\mathbf{v}$ *versore* in $\mathbb{R}^3$.

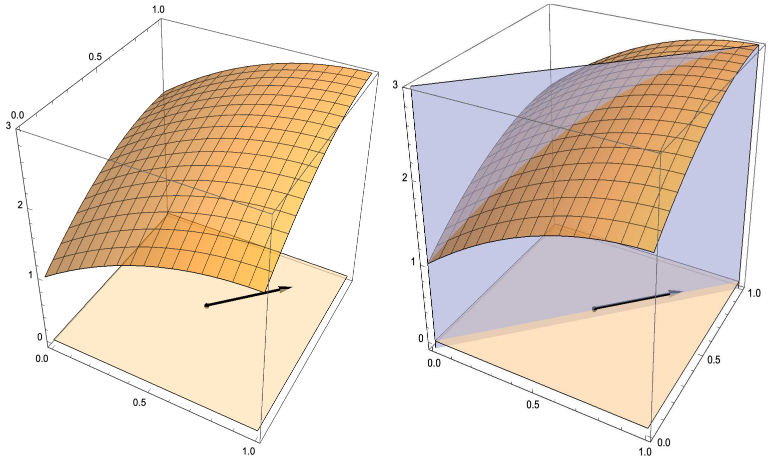
La derivata direzionale $D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x})$ di f in $\mathbf{x}$ è

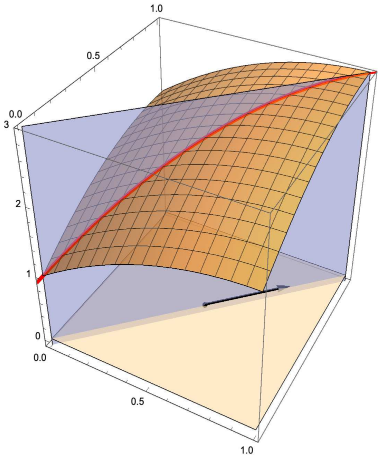
$$D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}) := \lim_{t \to 0} \frac{f(\mathbf{x} + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{x})}{t}.$$

Le tre derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x})$, $\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x})$ e $\frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{x})$ sono

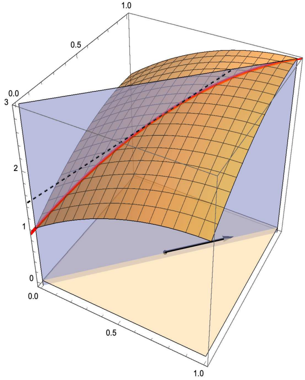
$$\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x}) := \lim_{t \to 0} \frac{f(\mathbf{x} + t\mathbf{e}_1) - f(\mathbf{x})}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + t, y, z) - f(x, y, z)}{t},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}) := \lim_{t \to 0} \frac{f(\mathbf{x} + t\mathbf{e}_2) - f(\mathbf{x})}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x, y + t, z) - f(x, y, z)}{t},$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{x}) := \lim_{t \to 0} \frac{f(\mathbf{x} + t\mathbf{e}_3) - f(\mathbf{x})}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x, y, z + t) - f(x, y, z)}{t},$$

in tutti i casi, se i limiti esistono finiti.

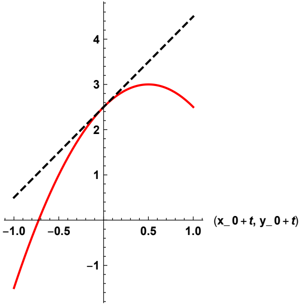

1.0
0.5
0.0
3
2
1
0
0.0
0.5
1.0
3
2
1
0
0.0
0.5
1.0
1.0
0.5
0.0

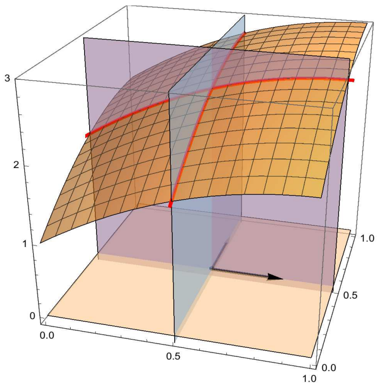


La derivata direzionale è il coefficiente angolare della tangente alla curva sezione con un piano verticale in direzione **v**.



La derivata direzionale è il coefficiente angolare della tangente alla curva sezione con un piano verticale in direzione **v**.





Le derivate parziali sono i coefficienti angolari delle sezioni con piani verticali paralleli agli assi coordinati.

Definizione (caso generale)

$A \subset \mathbb{R}^n$ aperto, $f : A \to \mathbb{R}$, $\mathbf{x} := (x_1, \dots, x_n) \in A$, $\mathbf{v}$ *versore* in $\mathbb{R}^n$.

La derivata direzionale $D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x})$ di f in $\mathbf{x}$ è

$$D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}) := \lim_{t \to 0} \frac{f(\mathbf{x} + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{x})}{t}.$$

Le n derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x})$ di f in $\mathbf{x}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) &:= \lim_{t \to 0} \frac{f(\mathbf{x} + t\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{x})}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i + t, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}{t} \end{aligned}$$

in tutti i casi, se i limiti esistono finiti.

Notazioni di uso comune

Per $i = 1, \ldots, n$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) := \partial_{x_i} f(\mathbf{x}) := D_{x_i} f(\mathbf{x}) := D_i f(\mathbf{x}) := f_{x_i}(\mathbf{x})$$

Analogamente, se $n = 2$ o $n = 3$ diventano

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) := \partial_x f(x, y) := D_x f(x, y) := f_x(x, y);$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) := \partial_y f(x, y) := D_y f(x, y) := f_y(x, y);$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) := \partial_z f(x, y, z) := D_z f(x, y, z) := f_z(x, y, z) \quad \text{etc.}$$

Le derivate parziali di ordine superiore si definiscono iterativamente.

Definizione

Per $n = 2$ ci sono 4 derivate parziali seconde:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} := \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} := \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} := \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} := \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Definizione

Per $n = 3$ ci sono 9 derivate parziali seconde:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} := \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} := \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} := \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} := \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} := \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} := \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} := \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} := \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} := \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

Definizione

Anche le derivate direzionali di ordine superiore si definiscono iterativamente:

$$D^2_{\mathbf{v},\mathbf{w}} f(\mathbf{x}) := D_{\mathbf{v}} \left(D_{\mathbf{w}} f(\mathbf{x}) \right), \text{etc.} \ldots$$

Analogamente per derivate di ordine maggiore di 2.

Definizione

Per $n = 2$ ci sono 8 derivate parziali terze:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} := \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right), \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} := \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right), \quad \dots$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} := \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right), \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} := \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right), \quad \dots$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} := \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}\right), \quad \dots\dots$$

Definizione

Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto, $f : A \to \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \in A$.

- f si dice derivabile in $\mathbf{x} \in A$ se in $\mathbf{x}$ esistono (finite) tutte le derivate direzionali $D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x})$;
- f si dice derivabile in A se f è derivabile in ogni punto di A;
- se f è derivabile in $\mathbf{x} \in A$, si denota gradiente di f in $\mathbf{x}$ il vettore $\nabla f(\mathbf{x})$ definito da

$$\nabla f(\mathbf{x}) := \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x})\,\mathbf{e}_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x})\,\mathbf{e}_n.$$

Se $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sono derivabili

$$
\begin{aligned}
D_{\mathbf{v}}(f+g)(\mathbf{x}) &= D_{\mathbf{v}}(f)(\mathbf{x}) + D_{\mathbf{v}}(g)(\mathbf{x}) \\
D_{\mathbf{v}}(fg)(\mathbf{x}) &= g(\mathbf{x})D_{\mathbf{v}}(f)(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x})D_{\mathbf{v}}(g) \\
D_{\mathbf{v}}(f/g)(\mathbf{x}) &= \frac{g(\mathbf{x})D_{\mathbf{v}}(f)(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})D_{\mathbf{v}}(g)(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})^2}
\end{aligned}
$$

inoltre se $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è derivabile

$$
D_{\mathbf{v}}(\phi(f))(\mathbf{x}) = \phi'(f(\mathbf{x}))D_{\mathbf{v}}(f)(\mathbf{x}).
$$

Example

Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è la funzione lineare

$$f(\mathbf{x}) := \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle = \sum_{h=1}^{n} a_h x_h$$

dove $\mathbf{a} = \sum_{i=1}^{n} a_1 \, \mathbf{e}_i$, allora

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) := a_i$$

Example

Se $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è la funzione quadratica

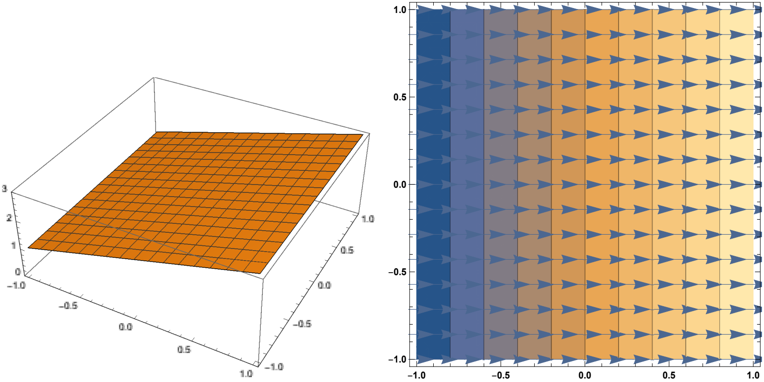
$$q(\mathbf{x}) := \langle A\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \sum_{h,k=1}^{n} a_{hk} x_h x_k ,$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad a_{hk} = a_{kh}.$$

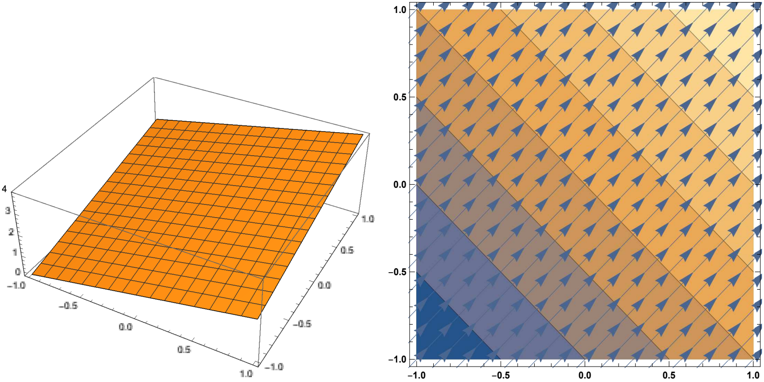
allora

$$\frac{\partial q}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = 2 \sum_{h=1}^{n} a_{ih} x_h = 2 \left(A\mathbf{x} \right)_i ,$$

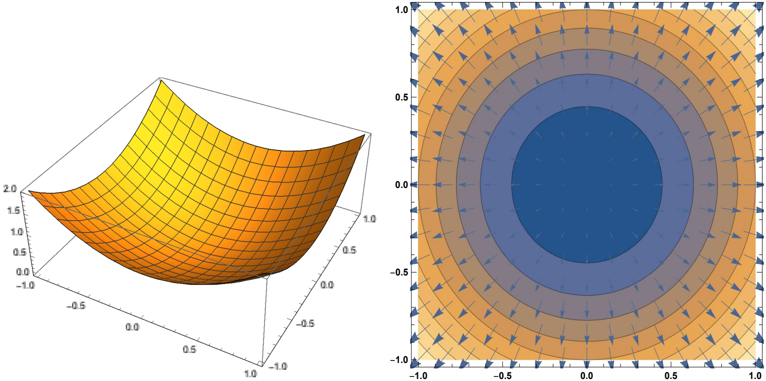
$$\frac{\partial^2 q}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}) = 2 a_{ij}.$$



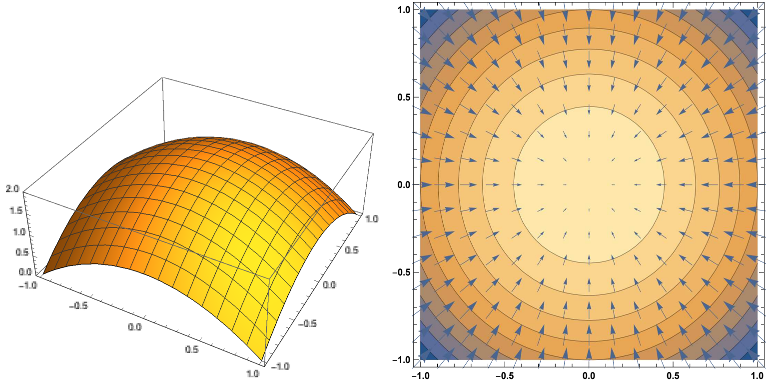
Grafico, insiemi di livello e gradiente di $f(x, y) := 2 + x$.



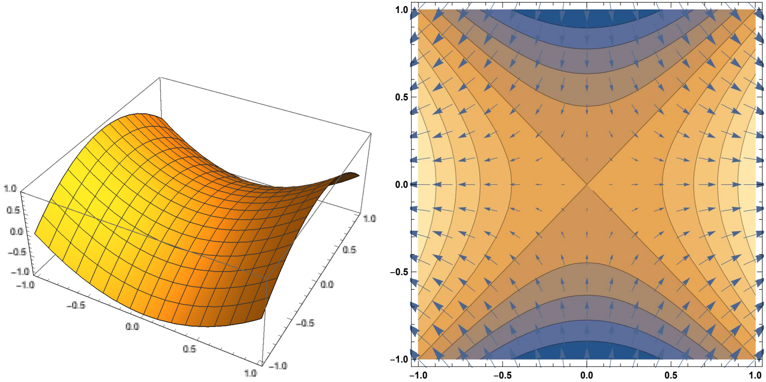
Grafico, insiemi di livello e gradiente di $f(x,y) := 2 + x + y$.



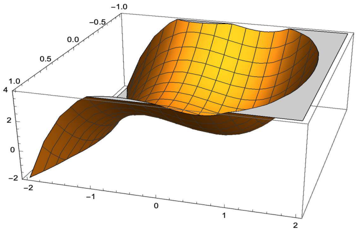
Grafico, insiemi di livello e gradiente di $f(x, y) := x^2 + y^2$.

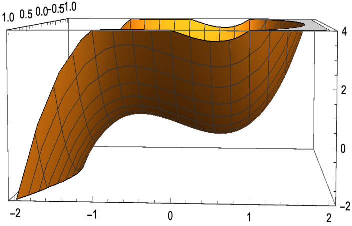


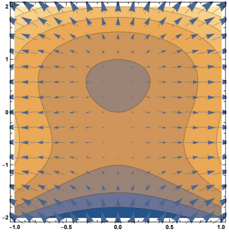
Grafico, insiemi di livello e gradiente di $f(x, y) := 2 - x^2 - y^2$.



Grafico, insiemi di livello e gradiente di $f(x, y) := x^2 - y^2$.







Grafico, insiemi di livello e gradiente di $f(x,y) := 4x^2 - y + y^3$.

Osservazione

- Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è derivabile in x_0 allora f è continua in x_0.
- Se $n > 1$ e se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ha tutte le derivate direzionali in $\mathbf{x}_0$ questo non implica necessariamente la continuità della funzione in $\mathbf{x}_0$.

Example

$$f(x_1, x_2) := \begin{cases} \dfrac{x_1 x_2^2}{x_1^2 + x_2^4}, & (x_1, x_2) \neq (0,0) \\ 0 & (x_1, x_2) = (0,0). \end{cases}$$

- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0;$
- $D_{\mathbf{v}} f(0,0)$ esiste finita per ogni $\mathbf{v} \neq (0,0);$
- f è discontinua in $(0,0)$ perchè non esiste $\lim_{\mathbf{x} \to 0} f(x_1, x_2).$