Differenziabilità e piano tangente. Funzioni di classe C^1

Raul Paolo Serapioni

Analisi Matematica A – Secondo modulo
Corso di Laurea in Matematica
Università di Trento

Lezione 19

Definizione

Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto, $f : A \to \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \in A$.
f è differenziabile in $\mathbf{x}$, se esiste $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ tale che

$$\lim_{\mathbf{h} \to \mathbf{0}} \frac{f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) - \langle \mathbf{a}, \mathbf{h} \rangle}{\|\mathbf{h}\|} = 0$$

o equivalentemente, se

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{a}, \mathbf{h} \rangle + o(\|\mathbf{h}\|), \qquad \text{per } \mathbf{h} \to 0$$

La funzione *lineare* $df_{\mathbf{x}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definita da

$$\mathbf{h} \mapsto df_{\mathbf{x}}(\mathbf{h}) := \langle \mathbf{a}, \mathbf{h} \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i,$$

si dice differenziale di f in $\mathbf{x}$.

Example ($n = 1$)

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è differenziabile in x_0 se esiste $a \in \mathbb{R}$ tale che

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = ah + o(h) \quad \text{per } h \to 0.$$

La teoria dice che in questo caso f è derivabile in x_0 e

$$a = f'(x_0).$$

Quindi la differenziabilità viene anche scritta come

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)h + o(h) \quad \text{per } h \to 0$$

e il differenziale df_{x_0} è la funzione lineare

$$df_{x_0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad df_{x_0}(h) := f'(x_0)h.$$

Example ($n = 2$)

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è differenziabile in $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ se esiste $\mathbf{a} = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ tale che, per $\mathbf{h} = (h_1, h_2) \to 0$,

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) = a_1 h_1 + a_2 h_2 + o(\mathbf{h}).$$

Ne segue (vedi dopo) che f è derivabile in $\mathbf{x}_0$ e

$$\mathbf{a} = (\partial_x f(\mathbf{x}_0), \partial_y f(\mathbf{x}_0)).$$

Quindi f è differenziabile in (x_0, y_0) se per $\mathbf{h} \to 0$

$$f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - f(x_0, y_0) = \partial_x f(\mathbf{x}_0) h_1 + \partial_y f(\mathbf{x}_0) h_2 + o(\mathbf{h})$$

e il differenziale $df_{\mathbf{x}_0} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è la funzione lineare

$$df_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{h}) := \partial_x f(\mathbf{x}_0) h_1 + \partial_y f(\mathbf{x}_0) h_2.$$

Osservazione

- $n = 1$: f differenziabile in $x \iff f$ derivabile in x ($\implies f$ continua in x);
- $n > 1$: f differenziabile in $x \implies f$ derivabile in x; ma l'implicazione inversa è falsa.

Teorema (differenziabilità $\implies$ derivabilità)

Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto, $f : A \to \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \in A$.

Se f è differenziabile in $\mathbf{x} \in A$ allora

1. f è continua in $\mathbf{x}$,
2. esistono tutte le derivate direzionali (e parziali) di f in $\mathbf{x}$,
3. $df_{\mathbf{x}}(\mathbf{h}) = \langle \nabla f(\mathbf{x}), \mathbf{h} \rangle$ e quindi
$$f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) = \langle \nabla f(\mathbf{x}), \mathbf{h} \rangle + o(\mathbf{h}), \qquad \text{per } \mathbf{h} \to 0$$
4. per ogni versore $\mathbf{v}$
$$D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}) = \langle \nabla f(\mathbf{x}), \mathbf{v} \rangle.$$

Traccia di prova

Poiché f è differenziabile in $\mathbf{x}$

$$\frac{f(\mathbf{x}+t\mathbf{e}_i)-f(\mathbf{x})}{t}=\frac{\langle \mathbf{a}, t\mathbf{e}_i\rangle + o(\|t\mathbf{e}_i\|)}{t}=a_i+\frac{o(|t|)}{t} \qquad \text{per } t\to 0$$

quindi

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) := \lim_{t\to 0}\frac{f(\mathbf{x}+t\mathbf{e}_i)-f(\mathbf{x})}{t}=\lim_{t\to 0}\left(a_i+\frac{o(|t|)}{t}\right)=a_i.$$

Di conseguenza $\mathbf{a}=\nabla f(\mathbf{x})$.

$$\begin{aligned}D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}) &:= \lim_{t\to 0}\frac{f(\mathbf{x}+t\mathbf{v})-f(\mathbf{x})}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\langle\nabla f(\mathbf{x}), t\mathbf{v}\rangle + o(\|t\mathbf{e}_i\|)}{t}\\ &=\langle\nabla f(\mathbf{x}),\mathbf{v}\rangle+\lim_{t\to 0}\frac{o(|t|)}{t}\\ &=\langle\nabla f(\mathbf{x}),\mathbf{v}\rangle.\end{aligned}$$

Definizione

Sia A un aperto di $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}_0 \in A$ e $f : A \to \mathbb{R}$.
Se f è differenziabile in $\mathbf{x}_0$

- il piano tangente al grafico di f nel punto $\mathbf{P}_0 := (\mathbf{x}_0, f(\mathbf{x}_0))$ è il sottospazio affine di $\mathbb{R}^{n+1}$ grafico della funzione $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
$$\mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x}_0) + \langle \nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle$$
- la retta normale al grafico di f in $\mathbf{P}_0$ è la retta per $\mathbf{P}_0$ perpendicolare al piano tangente. La retta normale è l'immagine della funzione $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n+1}$
$$t \mapsto (\mathbf{x}_0 + t\nabla f(\mathbf{x}_0), f(\mathbf{x}_0) - t)\,.$$

Sia $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f \in C^1(A)$, $(x_0, y_0) \in A$.

- Il piano tangente in $\mathbf{P}_0 := (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ è formato dai punti (x, y, z) che verificano "l'equazione del piano tangente"

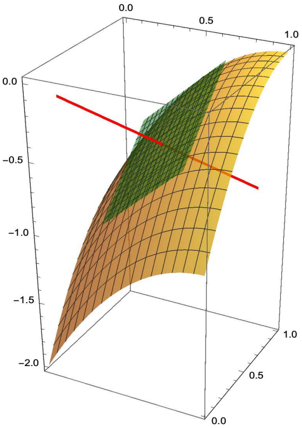
$$\partial_x f(x_0, y_0)(x - x_0) + \partial_y f(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - f(x_0, y_0)) = 0.$$

- Il vettore normale $\mathbf{n}$ al grafico di f in $\mathbf{P}_0$ è

$$\mathbf{n} := \pm(\partial_x f(x_0, y_0), \partial_y f(x_0, y_0), -1).$$

- La retta normale è formata dai punti $\mathbf{P}_0 \pm t\mathbf{n}$, per $t \in \mathbb{R}$, cioè

$$\{(x_0 + t\partial_x f(x_0, y_0), y_0 + t\partial_y f(x_0, y_0), f(x_0, y_0) - t) : \quad t \in \mathbb{R}\}.$$



$$f(x, y) := -(x-1)^2 - (y-1)^2$$

$\mathbf{P}_0 := (.5, .5, f(.5, .5))$

$$\nabla f(.5, .5) = (-1, -1)$$

Equazione del piano tangente in $\mathbf{P}_0$:

$$z = -0.5 - (x - 0.5) - (y - 0.5)$$

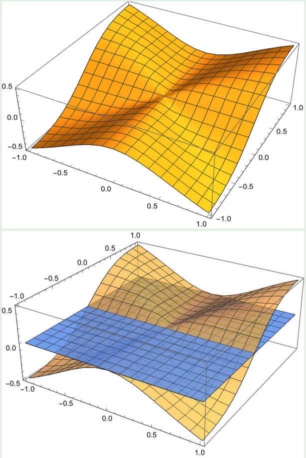
Vettore normale in $\mathbf{P}_0$:

$$\mathbf{n} = \pm(-\nabla f(.5, .5), 1) = \pm(1, 1, 1)$$

Retta normale

$$\{(t - .5, t - .5, t - .5), \quad t \in \mathbb{R}\}$$

Example



$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Tutte le derivate direzionali di f esistono in $(0,0)$ ma

- f non è differenziabile in $(0,0)$
- non esiste il piano tangente al grafico di f.

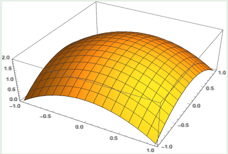
Teorema

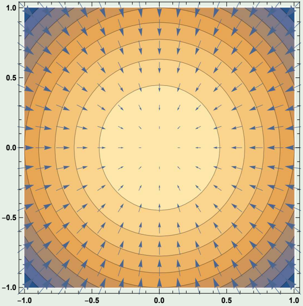
Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto, $f : A \to \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \in A$.

Se f è differenziabile in $\mathbf{x}$ allora

- $D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}) \leq \|\nabla f(\mathbf{x})\| \qquad$ per ogni versore $\mathbf{v}$;
- il gradiente dà la direzione di massima crescita di f in $\mathbf{x}$.
  Infatti se $\mathbf{w} := \dfrac{\nabla f(\mathbf{x})}{\|\nabla f(\mathbf{x})\|}$ allora $D_{\mathbf{w}} f(\mathbf{x}) = \|\nabla f(\mathbf{x})\|$,
  e
  $$\max_{\|\mathbf{v}\|=1} D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}) = \|\nabla f(\mathbf{x})\|$$

Example



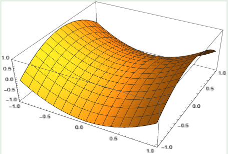


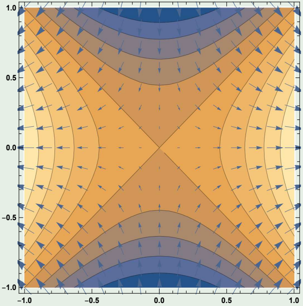
La direzione del gradiente indica la direzione di massima crescita del grafico e

$$\max_{\|\mathbf{v}\|=1} D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}) = \|\nabla f(\mathbf{x})\|$$

La lunghezza delle frecce è proporzionale a $\|\nabla f(\mathbf{x})\|$.

Example





La direzione del gradiente indica la direzione di massima crescita del grafico e

$$\max_{\|\mathbf{v}\|=1} D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}) = \|\nabla f(\mathbf{x})\|$$

La lunghezza delle frecce è proporzionale a $\|\nabla f(\mathbf{x})\|$.

Traccia di prova:

- È già stato provato che $D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}) = \langle \nabla f(\mathbf{x}), \mathbf{v} \rangle$;
- se $\|\mathbf{v}\| = 1$, per la disuguaglianza di Schwartz,

$$D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}) = \langle \nabla f(\mathbf{x}), \mathbf{v} \rangle \leq \|\nabla f(\mathbf{x})\|;$$

inoltre, se $\mathbf{w} := \dfrac{\nabla f(\mathbf{x})}{\|\nabla f(\mathbf{x})\|}$

$$D_{\mathbf{w}} f(\mathbf{x}) = \langle \nabla f(\mathbf{x}), \frac{\nabla f(\mathbf{x})}{\|\nabla f(\mathbf{x})\|} \rangle = \|\nabla f(\mathbf{x})\|.$$

Definizione

Sia A un aperto di $\mathbb{R}^n$ e $f : A \to \mathbb{R}$.
Se

- le derivate parziali $D_1 f, \ldots, D_n f$ esistono in ogni $\mathbf{x} \in A$
- $f, D_1 f, \ldots, D_n f$ sono funzioni continue in A

allora
f è di classe C^1 in A (equivalentemente $f \in C^1(A)$) .

Il seguente Teorema enuncia una condizione sufficiente e di ampio uso di differenziabilità.

Teorema (del differenziale totale)

Sia A aperto in $\mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}$ e $f \in C^1(A)$ allora f è differenziabile in ogni $\mathbf{x} \in A$.

Traccia di prova (in due variabili):

Sia $\mathbf{x} \in A$ t.c. $B(\mathbf{x}, r) \subset A$. Obiettivo è provare che

$$\lim_{\|\mathbf{h}\| \to 0} \frac{1}{\|\mathbf{h}\|} \left(f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) - \langle \nabla f(\mathbf{x}), \mathbf{h} \rangle \right) = 0 \qquad (1)$$

dove $\mathbf{h} = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ e $\mathbf{x} + \mathbf{h} \in B(\mathbf{x}, r)$.
Definiamo $g_1 : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ come

$$g_1(t) := f(\mathbf{x} + t\mathbf{e}_1) - f(\mathbf{x})$$

dove I è un intervallo contenente $t = 0$ e $t = h_1$. Osserviamo che g_1 è derivabile in $t = 0$ e quindi è differenziabile in $t = 0$;

$$g_1'(0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}),$$

quindi $\displaystyle \lim_{h_1 \to 0} \frac{1}{h_1} \left(g_1(h_1) - g_1(0) - g'(0) h_1 \right) = 0$ cioè

$$\lim_{h_1 \to 0} \frac{1}{h_1} \left(f(\mathbf{x} + h_1 \mathbf{e}_1) - f(\mathbf{x}) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}) h_1 \right) = 0. \qquad (2)$$

Analogamente, definiamo $g_2 : J \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ come

$$g_2(t) := f(\mathbf{x} + h_1\mathbf{e}_1 + t\mathbf{e}_2) - f(\mathbf{x} + h_1\mathbf{e}_1).$$

J è un intervallo contenente $t = 0$ e $t = h_2$. Anche g_2 è derivabile in J;

$$g_2'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x} + h_1\mathbf{e}_1 + t\mathbf{e}_2)$$

Per il Teorema di Lagrange esiste $\sigma \in (0, 1)$ tale che

$$g_2(h_2) - g_2(0) = g'(\sigma h_2)h_2$$

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x} + h_1\mathbf{e}_1) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x} + h_1\mathbf{e}_1 + \sigma\mathbf{e}_2)h_2. \tag{3}$$

Infine

$$\begin{aligned}
&\lim_{\|\mathbf{h}\|\to 0} \frac{1}{\|\mathbf{h}\|} \left(f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) - \langle \nabla f(\mathbf{x}), \mathbf{h} \rangle \right) \\
&\qquad = \lim_{\|\mathbf{h}\|\to 0} \frac{1}{\|\mathbf{h}\|} \left(f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}+h_1\mathbf{e}_1) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}) h_2 \right) \\
&\qquad\quad + \lim_{\|\mathbf{h}\|\to 0} \frac{1}{\|\mathbf{h}\|} \left(f(\mathbf{x}+h_1\mathbf{e}_1) - f(\mathbf{x}) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}) h_1 \right)
\end{aligned}$$

e, per il Teorema di Lagrange, esiste $\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{h}) \in (0,1)$ tale che

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\|\mathbf{h}\|\to 0} \frac{h_2}{\|\mathbf{h}\|} \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}+h_1\mathbf{e}_1+\sigma h_2\mathbf{e}_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}) \right) \\
&\quad + \lim_{\|\mathbf{h}\|\to 0} \frac{h_1}{\|\mathbf{h}\|} \left(\frac{f(\mathbf{x}+h_1\mathbf{e}_1) - f(\mathbf{x})}{h_1} - \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

per (2), (3) e per la continuità in $\mathbf{x}$ di $\frac{\partial f}{\partial x_2}$.

MEMO: Teorema di Lagrange per $n = 1$

Se $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ è continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b), allora esiste $c \in (a, b)$ tale che

$$g(b) - g(a) = g'(c)(b - a).$$

Teorema (di Lagrange per $n > 1$ o del valor medio)

A sia aperto in $\mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}$, $f \in C^1(A)$ e supponiamo che il segmento $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ sia contenuto in A. Allora esiste $\mathbf{c} \in (\mathbf{x}, \mathbf{y})$ tale che

$$f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) = \langle \nabla f(\mathbf{c}), \mathbf{y} - \mathbf{x} \rangle.$$

Traccia di prova:

Sia $g : [0, \|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|] \to \mathbb{R}$ definita da $g(t) := f\left(\mathbf{x} + t\frac{\mathbf{y}-\mathbf{x}}{\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|}\right)$.
g è continua e derivabile in $[0, \|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|]$ e

$$g'(t) = D_{\frac{\mathbf{y}-\mathbf{x}}{\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|}} f\left(\mathbf{x} + t\frac{\mathbf{y}-\mathbf{x}}{\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|}\right) = \langle \nabla f\left(\mathbf{x} + t\frac{\mathbf{y}-\mathbf{x}}{\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|}\right), \frac{\mathbf{y}-\mathbf{x}}{\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|}\rangle.$$

Quindi, per il teorema di Lagrange applicato a $g : [0, \|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|] \to \mathbb{R}$, esiste $\theta \in (0, \|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|)$ t.c.

$$\begin{aligned} f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) &= g(\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|) - g(0) = g'(\theta)\,\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\| \\ &= \langle \nabla f\left(\mathbf{x} + \theta\frac{\mathbf{y}-\mathbf{x}}{\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|}\right), \mathbf{y}-\mathbf{x}\rangle \\ &= \langle \nabla f(\mathbf{c}), \mathbf{y}-\mathbf{x}\rangle \end{aligned}$$