Nozione elementare di insiemi e di funzioni

Raul Paolo Serapioni

Analisi Matematica A – Secondo modulo
Corso di Laurea in matematica
Università di Trento

settembre 2019

Nozione intuitiva di insieme

Un insieme è una "collezione" di oggetti, detti elementi dell'insieme.

- $a \in A$: si legge "a è un elemento dell'insieme A"
- $B \subset A$ si legge "B è un sottoinsieme di A"

$$B \subset A \quad \text{vuol dire: ogni elemento di } B \text{ è elemento di } A$$

- esiste un insieme senza elementi, l'insieme vuoto, denotato da $\emptyset$. L'insieme vuoto è sottoinsieme di ogni insieme.

Example

- A:={2, 3, 5, 7}={i numeri primi < 10};
- B:={i numeri naturali pari e minori di 10^6};
- $\mathbb{P} := \{\text{i numeri primi}\} = \{2, 3, 5, 7, \dots\}$
  $\mathbb{N} := \{\text{i numeri naturali}\} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
  $\mathbb{Z} := \{\text{i numeri interi}\} = \{\cdots - 2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
  $\mathbb{Q} := \{\text{i numeri razionali}\}$
  $\mathbb{R} := \{\text{i numeri reali}\}$
  $\mathbb{C} := \{\text{i numeri complessi}\}$

Insiemi e predicati

Se X è un insieme

$$\{x \in X : \mathcal{A}(x)\}$$

indica l'insieme degli $x \in X$ per cui $\mathcal{A}(x)$ è vera.

Example

Sono sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ gli intervalli limitati e non limitati

$$
\begin{aligned}
(2,3) &:= \{x \in \mathbb{R} : 2 < x < 3\},\\
[2,3] &:= \{x \in \mathbb{R} : 2 \le x \le 3\},\\
(-\infty,3) &:= \{x \in \mathbb{R} : x < 3\},\\
[2,\infty) &:= \{x \in \mathbb{R} : 2 \le x\}
\end{aligned}
$$

L'insieme delle parti $\mathcal{P}(X)$ di un insieme X

$$X : \mathcal{P}(X) := \{A : \ A \subset X\}.$$

Example

Se $X = \{a, b, c\}$ allora

$$\mathcal{P}(X) = \big\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\big\}.$$

Se A e B sono insiemi, il prodotto cartesiano di A e B è l'insieme delle coppie ordinate

$$A \times B := \{(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

Example

Il piano euclideo è "naturalmente" identificato con $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
Lo spazio tridimensionale è identificato con $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Unione e intersezione

$$A \cup B := \{x : x \in A \vee x \in B\} = \{x : x \in A \text{ oppure } x \in B\}$$
$$A \cap B := \{x : x \in A \wedge x \in B\} = \{x : x \in A \text{ e } x \in B\}$$

Differenza, differenza simmetrica

$$A \setminus B := \{x \in A : x \notin B\},$$
$$\mathcal{C}_U A := \{x \in U : x \notin A\}$$
$$A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Proprietà distributiva di unione e intersezione

$$(X \cap Y) \cup Z = (X \cup Z) \cap (Y \cup Z)$$

$$(X \cup Y) \cap Z = (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$$

Se X e Y sono insiemi diciamo che

f è una funzione definita in X a valori in Y

se f "associa" ad ogni elemento $x \in X$ un elemento $f(x) \in Y$.

$$f : X \to Y, \qquad x \mapsto f(x)$$

- X si definisce dominio di f
- Y si definisce codominio di f
- l'immagine $f(X)$ è il sottoinsieme di Y formato da tutti gli elementi $f(x)$.

Se X e Y sono insiemi diciamo che

f è una funzione definita in X a valori in Y

se f "associa" ad ogni elemento $x \in X$ un elemento $f(x) \in Y$.

$$f : X \to Y, \qquad x \mapsto f(x)$$

- X si definisce dominio di f
- Y si definisce codominio di f
- l'immagine $f(X)$ è il sottoinsieme di Y formato da tutti gli elementi $f(x)$.

Definizione

Sia $f : X \to Y$. Il grafico di f è il sottoinsieme di $X \times Y$

$$\text{grafico di } f := \{(x, f(x)) : x \in X\}$$

Example

1. $$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) := 2x + 1 \end{aligned}$$

2. Sono funzioni diverse:

$$\begin{cases} g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto g(x) := x^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} h : [0, +\infty) \to \mathbb{R} \\ x \mapsto h(x) := x^2 \end{cases}$$

- Se $f : X \to Y$ e $A \subset X$ la restrizione f_A di f ad A è

$$\begin{cases} f_A : A \to Y \\ x \mapsto f_A(x) := f(x). \end{cases}$$

- la funzione identità di X, $\mathbf{Id}_X : X \to X$:

$$\begin{aligned} \mathbf{Id}_X : \quad & X \to X \\ & x \mapsto \mathbf{Id}_X(x) := x \end{aligned}$$

- la funzione caratteristica di $A \subset X$ è

$$\mathbf{1}_A : \quad X \to \{0, 1\} \qquad x \mapsto \mathbf{1}_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

Definizione

Sia $f : X \to Y$.

- f si dice iniettiva se

$$\text{per ogni } x_1, x_2 \in X, \quad x_1 \neq x_2 \text{ implica che } f(x_1) \neq f(x_2).$$

- f si dice suriettiva se

$$\text{per ogni } y \in Y \text{ esiste } x \in X \text{ tale che } f(x) = y.$$

- f si dice biunivoca fra X e Y (o bijettiva, o $1-1$) se

$$f \text{ è iniettiva e suriettiva.}$$

La nozione di iniettività o di suriettività dipendono anche da dominio e codominio.

Se $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ è possibile definire la funzione composta $g \circ f$:

$$g \circ f : X \to Z, \qquad (g \circ f)(x) := g(f(x)).$$

Se $f : X \to Y$ è biiettiva. Allora si può definire la funzione inversa f^{-1}:

$$f^{-1} : Y \to X, \text{ è tale che } f \circ f^{-1} = \mathbf{Id}_Y, \quad f^{-1} \circ f = \mathbf{Id}_X.$$

Example

1. se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è definita da $f(x) := 2x + 1$ allora f è biunivoca e la funzione inversa $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è definita da $f^{-1}(x) := \frac{x-1}{2}$
2. la "funzione" 2^x è biunivoca come funzione definita su $\mathbb{R}$ a valori in $(0, +\infty)$; la funzione inversa (il logaritmo in base 2) è $\log_2(x) : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$
3. la funzione $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non è iniettiva e nemmeno suriettiva. Però

$$\begin{cases} \cos : & [0, \pi) \to [-1, 1] \\ & x \mapsto \cos x \end{cases}$$

è biunivoca. La funzione inversa è $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi)$.