Osservazioni sul linguaggio

Raul Paolo Serapioni

Analisi Matematica A – Secondo modulo
Corso di Laurea in matematica
Università di Trento

settembre 2019

Osservazioni sul linguaggio matematico
Cap 1. 1.1, 1.2, 1.3, 1.4:

Sono proposizioni: $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \ldots$

- $\mathcal{A}$:= "3 è un numero pari";
- $\mathcal{B}$:= "$3 + 2 = 5$";
- $\mathcal{C}$:="$3 + 2 = 6$";
- $\mathcal{D}$:= "nel triangolo *ABC* ci sono due lati uguali";
- $\mathcal{E}$:= "nel triangolo *ABC* ci sono due angoli uguali";
- $\mathcal{F}$:= "$x := \pi/2$";
- $\mathcal{G}$:= "*P* appartiene alla retta *r*";
- $\ldots$

I connettivi logici

"e, o, se ... allora, non, se e solo se"

permettono di costruire proposizioni più complesse a partire da proposizioni più semplici.

- "P appartiene alla retta r e P appartiene alla retta s;
- "P appartiene alla retta r o P appartiene alla retta s;
- "se nel triangolo ABC ci sono due lati uguali allora nel triangolo ABC ci sono due angoli uguali";
- "nel triangolo ABC ci sono due lati uguali se e solo se nel triangolo ABC ci sono due angoli uguali";
- "non P appartiene alla retta r";

$\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$	in simboli	$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$
$\mathcal{A}$ o $\mathcal{B}$	...	$\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$
non $\mathcal{A}$	...	$\neg\mathcal{A}$
se $\mathcal{A}$ allora $\mathcal{B}$ / $\mathcal{A}$ implica $\mathcal{B}$	...	$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$
$\mathcal{A}$ se e solo se $\mathcal{B}$	...	$\mathcal{A} \iff \mathcal{B}$

"se $\mathcal{A}$ implica $\mathcal{B}$ e se $\mathcal{B}$ implica $\mathcal{C}$ allora $\mathcal{A}$ implica $\mathcal{C}$" che simbolicamente diventa

$$((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C})) \Rightarrow (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C})$$

"se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ oppure se $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ allora $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$" in simboli

$$((\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \vee (\mathcal{C} \wedge \mathcal{D})) \Rightarrow (\mathcal{B} \wedge \mathcal{C})$$

All'interno di una Teoria matematica una proposizione può essere Vera o Falsa. (In gergo: è possibile assegnare un valore di verità ad una proposizione).

Example

Nell'aritmetica elementare

- $\mathcal{A}$:= "3 è un numero pari" e $\mathcal{C}$:="$3+2=6$ sono False,
- $\mathcal{B}$:= "$3+2=5$" è Vera.

Nella logica che noi utilizzeremo le seguenti "Tavole di verità" determinano la verità o falsità di una proposizione composta a partire dalla verità o falsità delle proposizioni componenti.

Tavole di verità

$\mathcal{A}$	$\neg\mathcal{A}$
V	F
F	V

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$	$\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$	$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$	$\mathcal{A} \iff \mathcal{B}$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	V	F
F	F	F	F	V	V

Se $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ è vera diciamo che

- $\mathcal{A}$ è condizione sufficiente per $\mathcal{B}$ oppure che
- $\mathcal{B}$ è condizione necessaria per $\mathcal{A}$.

Nella logica che noi utilizzeremo le seguenti proposizioni sono Tautologie, cioè sono proposizioni vere indipendentemente dalla verità o falsità delle proposizioni $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$.

- $\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{A}$ *(terzo escluso)*
- $\neg(\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{A})$ *(principio di non contraddizione)*
- $((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge \mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{B}$ *(modus ponens)*
- $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \iff (\neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A})$ *(principio di contrapposizione)*
- $((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C})) \Rightarrow (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C})$ *(sillogismo ipotetico)*
- $\neg(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \iff \neg\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{B}$
- $\neg(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \iff \neg\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B}$

Molte espressioni matematiche contengono una o più variabili. Sono dette **predicati**: $\mathcal{A}(x), \mathcal{P}(x, y), \ldots$.

- $\mathcal{A}(x)$:= "x è un numero intero";
- $\mathcal{B}(x)$:= "$3 + x = 5$";
- $\mathcal{C}(x, y)$:="$x + y = 0$";
- $\mathcal{D}(x)$:= "$x^2 - 1 = 2x + 4$";
- $\mathcal{E}(z)$:= "$z^5 + 2z^4 + 3z^3 + 4z^2 + 5z = 1$";
- $\mathcal{F}(x, y, z, n)$:= "$x^n + y^n = z^n$";
- $\mathcal{G}(P)$:= "P appartiene alla retta r";
- $\ldots$

I *quantificatori*

- 'per ogni ...'
- 'esiste un/una ...'

sono locuzioni molto usate nel linguaggio matematico.
Sono stenografati con i simboli $\forall$ e $\exists$.

- "per ogni x, $\mathcal{P}(x)$ è vera" *è in simboli* $\forall x : \mathcal{P}(x)$
- "esiste x tale che $\mathcal{P}(x)$ è vera" *è in simboli* $\exists x : \mathcal{P}(x)$

$\exists$ ha il significato di *esiste almeno uno*.
Per indicare l'esistenza di *esattamente un solo* oggetto con una certa proprietà di solito si usa il simbolo $\exists!$.

I *quantificatori*

- ‘per ogni ...’
- ‘esiste un/una ...’

sono locuzioni molto usate nel linguaggio matematico.
Sono stenografati con i simboli $\forall$ e $\exists$.

- "per ogni x, $\mathcal{P}(x)$ è vera" *è in simboli* $\forall x : \mathcal{P}(x)$
- "esiste x tale che $\mathcal{P}(x)$ è vera" *è in simboli* $\exists x : \mathcal{P}(x)$

$\exists$ ha il significato di *esiste almeno uno*.
Per indicare l’esistenza di *esattamente un solo* oggetto con una certa proprietà di solito si usa il simbolo $\exists!$.

Example

Per ogni numero reale x è vero che $2^x > x$.

- La negazione di "*per ogni x* $P(x)$ *è vera*" è

  esiste un x per il quale $P(x)$ è falsa

- La negazione di "*esiste x tale che* $P(x)$ *è vera*" è

  per ogni x $P(x)$ è falsa

Negazione di proposizioni contenenti quantificatori

$$\neg(\forall x : \mathcal{P}(x)) \iff (\exists x : \neg\mathcal{P}(x))$$
$$\neg(\exists x : \mathcal{P}(x)) \iff (\forall x : \neg\mathcal{P}(x))$$

- La negazione di "*per ogni x* $P(x)$ *è vera*" è

  esiste un x per il quale $P(x)$ è falsa

- La negazione di "*esiste x tale che* $P(x)$ *è vera*" è

  per ogni x $P(x)$ è falsa

Negazione di proposizioni contenenti quantificatori

$$\neg(\forall x : \mathcal{P}(x)) \iff (\exists x : \neg\mathcal{P}(x))$$
$$\neg(\exists x : \mathcal{P}(x)) \iff (\forall x : \neg\mathcal{P}(x))$$

Example

non è vero che: per ogni $x \in \mathbb{Q}$ esiste $y \in \mathbb{Q}$ tale che $xy = 1$

è

esiste un $x \in \mathbb{Q}$ tale che
non è vero che esiste $y \in \mathbb{Q}$ tale che $xy = 1$

cioè

esiste un $x \in \mathbb{Q}$ tale che
per ogni $y \in \mathbb{Q}$ non è vero che $xy = 1$

cioè

$$\neg(\forall x \in \mathbb{Q}, \exists y \in \mathbb{Q}, xy = 1) \iff \exists x \in \mathbb{Q}, \forall y \in \mathbb{Q}, xy \neq 1$$

Il linguaggio matematico usa parole e costruzioni della lingua italiana con un significato a volte diverso.

o, oppure: nel linguaggio matematico o/oppure non sono esclusivi. Per esempio

$$\{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 2 \quad \text{o} \quad 1 < x < 3\} = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 3\}.$$

e: ha lo stesso significato che nella lingua parlata.

$$\{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 2 \quad \text{e} \quad 1 < x < 3\} = \{x \in \mathbb{R} : 1 < x < 2\}.$$

il / **la:** individuano univocamente un oggetto. Per esempio,

la soluzione dell'equazione: $x^3 - 8 = 0$

indica che esiste esattamente una soluzione dell'equazione.

un/ una: indicano un oggetto con valore indeterminato. Per esempio

$$\textbf{una} \text{ soluzione dell'equazione: } \cos x = 0.$$

Nel linguaggio matematico ha, a volte, un uso diverso di quello solito nella lingua parlata. Per esempio la frase

Giovanni è **un** colpevole

ha il significato implicito che Giovanni non sia l'unico colpevole. Questo manca nell'uso matematico. Per esempio, se dico

$$0 \text{ è } \textbf{una} \text{ soluzione reale dell'equazione: } x^3 + 4x + \sin x = 0$$

non intendo dire che, oltre alla soluzione $x = 0$, esistono altre soluzioni reali.

un/ una: indicano un oggetto con valore indeterminato. Per esempio

una soluzione dell'equazione: $\cos x = 0$.

Nel linguaggio matematico ha, a volte, un uso diverso di quello solito nella lingua parlata. Per esempio la frase

Giovanni è **un** colpevole

ha il significato implicito che Giovanni non sia l'unico colpevole. Questo manca nell'uso matematico. Per esempio, se dico

0 è **una** soluzione reale dell'equazione: $x^3 + 4x + \sin x = 0$

non intendo dire che, oltre alla soluzione $x = 0$, esistono altre soluzioni reali.

un / **una:** sono usati anche per dichiarare un elemento generico di un insieme. Per esempio

Sia dato un punto x appartenente ad un insieme E ...

oppure

Dato un $\varepsilon > 0$ si può trovare un $\delta > 0$ ...

Frasi di questo tipo sono equivalenti a

Per ogni punto x appartenente ad un insieme E ...

oppure

Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ ...

se: in italiano sono usate frasi del tipo

$$\ldots \text{(è vero)}\ \mathcal{A}\ \textbf{se}\ \text{(è vero)}\ \mathcal{B}\ \ldots$$

per esempio

. . . vado in montagna **se** c'è il sole . . .

Questa frase può significare sia:

. . . **se** c'è il sole **allora** vado in montagna . . .

che:

. . . **se** vado in montagna **allora** (vuol dire che) c'è il sole. . .

se:

Variante dell'esempio precedente: la lingua italiana ammette che la frase

$x^n + x + 1 = 0$ ha una soluzione reale **se** n è dispari

possa voler dire sia:

se n è dispari **allora** $x^n + x + 1 = 0$ ha una soluzione reale

che

se $x^n + x + 1 = 0$ ha una soluzione reale **allora** n è dispari.