Funzioni di classe C^2 e formula di Taylor
Estremi liberi

Raul Paolo Serapioni

Analisi Matematica A – Secondo modulo
Corso di Laurea in Matematica
Università di Trento

Lezione 20

Supponiamo che A sia aperto in $\mathbb{R}^n$ e $f : A \to \mathbb{R}$.

Definizione: Funzioni di classe C^2

- Se tutte le derivate parziali fino all'ordine 2: $D_{x_1} f, \ldots, D_{x_n} f$, $D^2_{x_1,x_1} f$, $D^2_{x_1,x_2} f, \ldots, D^2_{x_n,x_n} f$, esistono in ogni $\mathbf{x} \in A$
- se f, $D_1 f, \ldots, D_n f$, $D^2_{x_1,x_1} f, \ldots, D^2_{x_n,x_n} f$ sono continue in A

allora f è di classe C^2 in A (o $f \in C^2(A)$) .

Definizione: Funzioni di classe C^k, $k > 1$

- Se tutte le derivate parziali fino all'ordine k: $D_{x_1} f, \ldots, D_{x_n} f$, $D^2_{x_1,x_1} f, \ldots, D^k_{x_{i_1},\ldots,x_{i_k}} f$, esistono in ogni $\mathbf{x} \in A$
- se f, $D_{x_i} f$, $D^2_{x_i,x_j} f, \ldots, D^k_{x_{i_1},\ldots,x_{i_k}} f$ sono continue in A

allora f è di classe C^k in A (o $f \in C^k(A)$) .

Teorema di Schwartz

Sia A sia aperto in $\mathbb{R}^n$ e $f : A \to \mathbb{R}$.

- Se le derivate seconde miste $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ esistono in un intorno di $\mathbf{x} \in A$
- se $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ sono continue in $\mathbf{x}$

allora

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{x}).$$

Corollario

Se $f \in C^2(A)$ allora in ogni $\mathbf{x} \in A$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{x}) \qquad \text{per ogni } 1 \leq i < j \leq n.$$

Definizione: la matrice Hessiana

Se f è due volte derivabile in $\mathbf{x} \in A \subset \mathbb{R}^n$ si definisce matrice Hessiana $Hf(\mathbf{x})$ di f in $\mathbf{x}$ la matrice $n \times n$ formata da tutte le derivate parziali seconde.

$$Hf(\mathbf{x}) := \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\mathbf{x}), & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\mathbf{x}), & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\mathbf{x}), & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\mathbf{x}), & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\mathbf{x}), & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(\mathbf{x}), & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

Corollario 1

Se A è un aperto di $\mathbb{R}^n$ e se $f \in C^2(A)$ allora la matrice Hessiana è una matrice simmetrica in ogni punto di A;

Corollario 2

Se A è un aperto di $\mathbb{R}^n$ e se $f \in C^2(A)$ allora per ogni coppia di versori **v** e **w** e per ogni $\mathbf{x} \in A$

$$D^2_{\mathbf{v},\mathbf{w}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{w}^T (\mathrm{H}f(\mathbf{x}))\mathbf{v} = \langle \mathrm{H}f(\mathbf{x})\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle.$$

Example

Se A è un aperto di $\mathbb{R}^2$ e se $f \in C^3(A)$ allora

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}; \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}$$

Example

Se A è un aperto di $\mathbb{R}^3$ e se $f \in C^4(A)$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x_1^2 \partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial^4 f}{\partial x_2 \partial x_1^2 \partial x_3} = \cdots = \partial^4_{x_1^2, x_2, x_3} f$$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x_2^2 \partial x_3^2} = \frac{\partial^4 f}{\partial x_2 \partial x_3 \partial x_2 \partial x_3} = \cdots = \partial^4_{x_2^2, x_3^2} f$$

Memo: formula di Taylor in una variabile.
Sia I un intervallo, $g : I \to \mathbb{R}$, $g \in C^2(I)$ e $x_0 \in I$.

con resto secondo Peano:

se $x_0 + h \in I$

$$g(x_0 + h) = g(x_0) + g'(x_0)h + \frac{1}{2}g''(x_0)h^2 + o(h^2)$$

per $h \to 0$

con resto secondo Lagrange:

per ogni h, se $x_0 + h \in I$ esiste $\theta = \theta(x_0, h)$, compreso fra x_0 e $x_0 + h$, t.c.

$$g(x_0 + h) = g(x_0) + g'(x_0)h + \frac{1}{2}g''(\theta)h^2.$$

Teorema: formula di Taylor con resto di tipo Peano

Sia A aperto in $\mathbb{R}^n$, $f \in C^2(A)$. Supponiamo che il segmento $[\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0 + \mathbf{h}] \subset A$. Allora

$$\lim_{\mathbf{h}\to 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - \langle \nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{h} \rangle - \frac{1}{2}\mathbf{h}^T(\mathrm{H}f(\mathbf{x}_0))\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|^2} = 0.$$

Equivalentemente,

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + \langle \nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{h} \rangle + \frac{1}{2}\mathbf{h}^T(\mathrm{H}f(\mathbf{x}_0))\mathbf{h} + o(\|\mathbf{h}\|^2)$$

per $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$.

Teorema: formula di Taylor con resto di tipo Lagrange

Sia A aperto in $\mathbb{R}^n$, $f \in C^2(A)$, $\mathbf{x}_0 \in A$.
Allora, per ogni $\mathbf{h}$, per il quale il segmento $[\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0 + \mathbf{h}] \subset A$, esiste $\mathbf{c} = \mathbf{c}(\mathbf{x}_0, \mathbf{h})$ contenuto nel segmento $(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0 + \mathbf{h})$ e tale che

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + \langle \nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{h} \rangle + \frac{1}{2} \mathbf{h}^T (\mathrm{H} f(\mathbf{c})) \mathbf{h}.$$

Traccia di dimostrazione:

$\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h} \in A$ per $t \in [0,1]$. Si definisce $g : [0, \|\mathbf{h}\|] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ come

$$g(t) := f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}/\|\mathbf{h}\|).$$

g è due volte derivabile in $[0, \|\mathbf{h}\|]$ e

$$g'(t) = D_{\mathbf{h}/\|\mathbf{h}\|} g(t) = \frac{1}{\|\mathbf{h}\|} \langle \nabla f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}/\|\mathbf{h}\|), \mathbf{h} \rangle$$

$$g''(t) = \frac{1}{\|\mathbf{h}\|^2} \mathbf{h}^T \cdot \mathrm{H} f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}/\|\mathbf{h}\|) \cdot \mathbf{h}$$

La formula di Taylor per g con resto di Peano implica che per $\|\mathbf{h}\| \to 0$

$$
\begin{aligned}
f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) &= g(\|\mathbf{h}\|) \\
&= g(0) + g'(0)\,\|\mathbf{h}\| + \frac{1}{2} g''(0)\,\|\mathbf{h}\|^2 + o(\|\mathbf{h}\|^2) \\
&= f(\mathbf{x}_0) + \langle \nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{h} \rangle + \frac{1}{2} \mathbf{h}^T \cdot (\mathrm{H} f(\mathbf{x}_0)) \cdot \mathbf{h} + o(\|\mathbf{h}\|^2).
\end{aligned}
$$

La formula di Taylor per g con resto di Lagrange implica l'esistenza di un opportuno $\theta \in (0, \|\mathbf{h}\|)$ tale che

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) &= g(\|\mathbf{h}\|) \\ &= g(0) + g'(0)\,\|\mathbf{h}\| + \frac{1}{2} g''(\theta)\,\|\mathbf{h}\|^2 \\ &= f(\mathbf{x}_0) + \langle \nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{h} \rangle + \frac{1}{2}\mathbf{h}^T (\mathrm{H} f(\mathbf{c}))\mathbf{h}, \end{aligned}$$

dove $\mathbf{c} := \mathbf{x}_0 + \theta \frac{\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|}$.

$\square$

La formula di Taylor scritta in forma estesa:

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) h_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0) h_i h_j + o(h_1^2 + \cdots + h_n^2).$$

In particolare, due variabili, se $\mathbf{x}_0 + \mathbf{h} \mapsto (x, y)$, diventa

$$\begin{aligned} f(x,y) = f(x_0,y_0) \\ &+ \langle \nabla f(x_0,y_0), (x - x_0, y - y_0) \rangle \\ &+ \frac{1}{2}(x - x_0, y - y_0)^T \mathrm{H} f(x_0,y_0)(x - x_0, y - y_0) \\ &+ o((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2), \end{aligned}$$

per $(x, y) \to (x_0, y_0)$

e scrivendo esplicitamente i termini della matrice Hessiana (al fine di apprezzare i vantaggi di una scrittura compatta!)

$$
\begin{aligned}
&f(x, y) \\
&= f(x_0, y_0) \\
&\quad + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \\
&\quad\quad + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0)\right. \\
&\quad\quad\quad \left. + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)(y - y_0)^2\right) \\
&\quad\quad\quad\quad + o((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2),
\end{aligned}
$$

per $(x, y) \to (x_0, y_0)$.

Il "polinomio di Taylor" di secondo grado

$$\mathbf{h} \mapsto f(\mathbf{x}_0) + \langle \nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{h} \rangle + \frac{1}{2}\mathbf{h}^T \cdot \mathrm{H}f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{h}$$

è la somma di

$$f(\mathbf{x}_0)$$

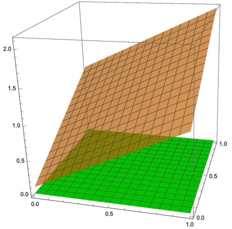
$$\mathbf{h} \mapsto \langle \nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{h} \rangle \qquad \text{lineare in } \mathbf{h}$$

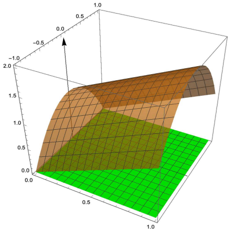
$$\mathbf{h} \mapsto \frac{1}{2}\mathbf{h}^T \cdot \mathrm{H}f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{h} \qquad \text{omogeneo di secondo grado in } \mathbf{h}$$

La funzione

$$\mathbf{h} \mapsto \frac{1}{2}\mathbf{h}^T \cdot \mathrm{H}f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{h}$$

è una forma quadratica nelle variabili $h_1, \dots, h_n$.





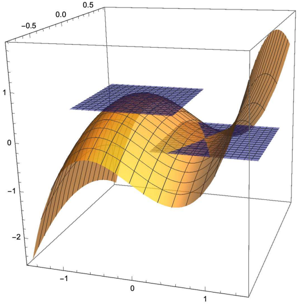
Definizione

Sia $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $\mathbf{x}_0 \in E$.

- $\mathbf{x}_0$ è un **punto di massimo assoluto** per f in E se $f(\mathbf{x}) \le f(\mathbf{x}_0)$ per ogni $\mathbf{x} \in E$.
- $\mathbf{x}_0$ è un **punto di massimo locale** per f in E se esiste $r > 0$ tale che

$$f(\mathbf{x}) \le f(\mathbf{x}_0)$$

per ogni $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, r) \cap E$.



Definizione

Sia $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $\mathbf{x}_0 \in E$. Diciamo che $\mathbf{x}_0$ è un punto stazionario di f se

- f è differenziabile in $\mathbf{x}_0$
- $\nabla f(\mathbf{x}_0) = 0$.

Condizione necessaria per gli estremi liberi.

Teorema (tradizionalmente noto come teorema di Fermat)

1. Se A è un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^n$,
2. se $f : A \to \mathbb{R}$ è differenziabile in $\mathbf{x}_0 \in A$,
3. se $\mathbf{x}_0 \in A$ è un punto di massimo o minimo locale per f

allora $\mathbf{x}_0$ è un punto stazionario di f, cioè

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) = 0.$$

Traccia di dimostrazione

Proviamo che $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) = 0$ per $i = 1, \ldots, n$.
Poiché $\mathbf{x}_0$ è un massimo locale e A è aperto, esiste $\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{x}_0) > 0$ t.c.

$$f(\mathbf{x}_0 + h\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{x}_0) \leq 0 \qquad \text{per } h \in (-\varepsilon, \varepsilon)$$

$$\text{quindi} \qquad \frac{f(\mathbf{x}_0 + h\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{x}_0)}{h} \begin{cases} \geq 0 & h \in (-\varepsilon, 0) \\ \leq 0 & h \in (0, \varepsilon). \end{cases}$$

Per ipotesi $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0)$ esiste allora entrambi i seguenti limiti esistono e, per il teorema di permanenza del segno,

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(\mathbf{x}_0 + h\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{x}_0)}{h} \geq 0, \qquad \lim_{h \to 0^+} \frac{f(\mathbf{x}_0 + h\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{x}_0)}{h} \leq 0$$

$$\text{quindi} \qquad \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) := \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + h\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{x}_0)}{h} = 0$$

Memo: Forme quadratiche e loro segno

- A è una matrice $n \times n$ simmetrica. Definiamo forma quadratica il polinomio omogeneo di secondo grado

$$\mathbf{x} \mapsto Q(\mathbf{x}) := \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$$

- A può essere diagonalizzata. Esiste una base ortogonale $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ di $\mathbb{R}^n$ rispetto alla quale Q diventa

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{y}^T C^T AC\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2$$

- Dalla precedente seguono le disuguaglianze

$$\min_i \lambda_i \|\mathbf{x}\|^2 \leq Q(\mathbf{x}) \leq \max_i \lambda_i \|\mathbf{x}\|^2$$

Definizione

La forma quadratica $\mathbf{x} \mapsto Q(\mathbf{x}) := \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ è

- definita positiva se $\lambda := \min_i \lambda_i > 0$ e quindi
$$\lambda\|\mathbf{x}\|^2 \leq Q(\mathbf{x})$$
- definita negativa se $\mu := \max_i \lambda_i < 0$ e quindi
$$Q(\mathbf{x}) \leq \mu\|\mathbf{x}\|^2$$
- indefinita se $\lambda := \min_i \lambda_i < 0 < \mu := \max_i \lambda_i$. In questo caso esistono $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ tali che, per ogni $t \in \mathbb{R}$,
$$Q(t\mathbf{v}) = \lambda t^2$$
$$Q(t\mathbf{w}) = \mu t^2.$$

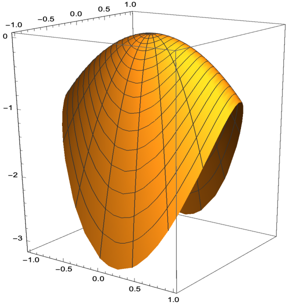


Figure: Grafico di una forma quadratica su $\mathbb{R}^2$ definita negativa.

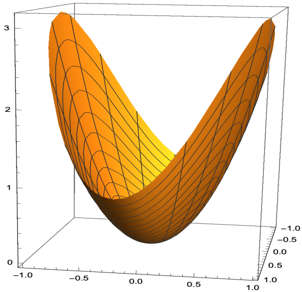


Figure: Grafico di una forma quadratica su $\mathbb{R}^2$ definita positiva.

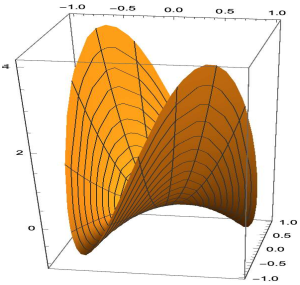


Figure: Grafico di una forma quadratica su $\mathbb{R}^2$ indefinita.

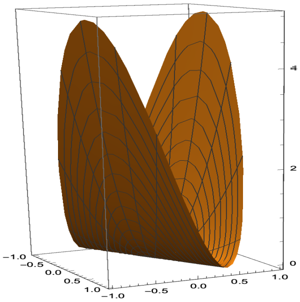


Figure: Grafico di una forma quadratica su $\mathbb{R}^2$ semidefinita positiva.

Definizione: forme quadratiche semidefinite

La forma quadratica $\mathbf{x} \mapsto Q(\mathbf{x}) := \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ è

- semidefinita positiva se
  $\lambda := \min_i \lambda_i = 0$ e $\mu := \max_i \lambda_i > 0$.
- semidefinita negativa se
  $\lambda := \min_i \lambda_i < 0$ e $\mu := \max_i \lambda_i = 0$.

Memo: *Condizioni sufficienti perchè un punto sia di massimo o minimo locale di* $f : (a,b) \to \mathbb{R}$.

Teorema: Estremi liberi su un intervallo

Supponiamo che $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ e $f \in C^2((a,b))$.

1. Se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) > 0$ allora x_0 è un minimo locale;
2. Se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) < 0$ allora x_0 è un massimo locale;

Condizioni sufficienti perché un punto sia di massimo o minimo locale

Teorema: condizioni sufficienti di massimo/minimo

Supponiamo che A sia aperto in $\mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}$ e $f \in C^2(A)$.

1. Se $\mathbf{x}_0 \in A$ è un punto stazionario di f e $\mathrm{H}f(\mathbf{x}_0)$ è definita positiva allora $\mathbf{x}_0$ è un punto di minimo locale per f;
2. se $\mathbf{x}_0 \in A$ è un punto stazionario di f e $\mathrm{H}f(\mathbf{x}_0)$ è definita negativa allora $\mathbf{x}_0$ è un punto di massimo locale per f;
3. se $\mathbf{x}_0 \in A$ è un punto stazionario di f e $\mathrm{H}f(\mathbf{x}_0)$ è indefinita allora $\mathbf{x}_0$ non è né massimo né minimo; $\mathbf{x}_0$ si dice punto di sella per f.

Traccia di dimostrazione:

- Se $\mathrm{H}f(\mathbf{x}_0)$ è definita positiva, esiste $\lambda_1 > 0$ tale che

$$\mathbf{h}^T(\mathrm{H}f(\mathbf{x}_0))\mathbf{h} \geq \lambda_1 \|\mathbf{h}\|^2 .$$

Per la formula di Taylor, ricordando che $\nabla f(\mathbf{x}_0) = 0$,

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) &= \frac{1}{2}\mathbf{h}^T(\mathrm{H}f(\mathbf{x}_0))\mathbf{h} + o(\|\mathbf{h}\|^2) \\ &\geq \frac{\lambda_1}{2}\|\mathbf{h}\|^2 + o(\|\mathbf{h}\|^2) \\ &= \|\mathbf{h}\|^2 \left(\frac{\lambda_1}{2} + \frac{o(\|\mathbf{h}\|^2)}{\|\mathbf{h}\|^2} \right) \end{aligned}$$

Poiché

$$\lim_{\mathbf{h}\to 0} \frac{o(\|\mathbf{h}\|^2)}{\|\mathbf{h}\|^2} = 0,$$

esiste $r > 0$ tale che

$$\left|\frac{o(\|\mathbf{h}\|^2)}{\|\mathbf{h}\|^2}\right| < \frac{\lambda_1}{4} \qquad \text{per } 0 < \|\mathbf{h}\| < r.$$

Quindi, per $0 < \|\mathbf{h}\| < r$,

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) &\geq \|\mathbf{h}\|^2 \left(\frac{\lambda_1}{2} + \frac{o(\|\mathbf{h}\|^2)}{\|\mathbf{h}\|^2}\right) \\ &> \|\mathbf{h}\|^2 \lambda_1/4 \geq 0, \end{aligned}$$

cioè $\mathbf{x}_0$ è un punto di minimo locale.

• Se $\mathrm{H}f(\mathbf{x}_0)$ è definita negativa, esiste $\lambda_n < 0$ tale che

$$\mathbf{h}^T \cdot \mathrm{H}f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{h} \leq \lambda_n \|\mathbf{h}\|^2$$

e, analogamente, si deduce che $\mathbf{x}_0$ è un massimo locale.

• Se $\mathrm{H}f(\mathbf{x}_0)$ è indefinita, allora esistono $\lambda_1 < 0$, $\lambda_n > 0$ e due versori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ tali che

$$\begin{aligned} t\mathbf{v}^T \cdot \mathrm{H}f(\mathbf{x}_0) \cdot t\mathbf{v} &= \lambda_1 t^2 \leq 0 \qquad t \in \mathbb{R} \\ t\mathbf{w}^T \cdot \mathrm{H}f(\mathbf{x}_0) \cdot t\mathbf{w} &= \lambda_n t^2 \geq 0 \qquad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Stimiamo, con la formula di Taylor, separatamente, le differenze

$$\begin{aligned} & f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{x}_0) \\ & f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{w}) - f(\mathbf{x}_0), \end{aligned}$$

e, con un argomento simile al precedente, otteniamo che esiste $r > 0$ tale che

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{tv}) - f(\mathbf{x}_0) < 0 \qquad & \text{per } 0 < |t| < r \\ f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{tw}) - f(\mathbf{x}_0) > 0 \qquad & \text{per } 0 < |t| < r. \end{aligned}$$

Quindi in qualsiasi intorno $B(\mathbf{x}_0, t)$ per $t > 0$ esistono punti in cui f è maggiore di $f(\mathbf{x}_0)$ e punti in cui f è minore di $f(\mathbf{x}_0)$; cioè $\mathbf{x}_0$ non è né massimo né minimo locale.

$\square$

Osservazione

Supponiamo che A sia aperto in $\mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}$ e $f \in C^2(A)$.

1. Se $\mathbf{x}_0 \in A$ è un punto stazionario e $\mathrm{H}f(\mathbf{x}_0)$ è semidefinita positiva allora $\mathbf{x}_0$ non è un punto di massimo locale per f;
2. se $\mathbf{x}_0 \in A$ è un punto stazionario e $\mathrm{H}f(\mathbf{x}_0)$ è semidefinita negativa allora $\mathbf{x}_0$ non è un punto di minimo locale per f.