Funzioni a valori vettoriali
Differenziabilità e regola della catena

Analisi Matematica A – Secondo modulo
Corso di Laurea in Matematica
Università di Trento

Lezione 21

Sia $E \subset \mathbb{R}^n$. Una funzione a valori vettoriali

$$\mathbf{f} : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

si identifica con una m-upla di funzioni a valori reali $f_i : E \to \mathbb{R}$:

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{f}(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_m(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{m} f_i(\mathbf{x})\,\mathbf{e}_i$$

$f_i : E \to \mathbb{R}$ sono le *componenti* di $\mathbf{f}$.

Definizione

Una funzione a valori vettoriale $\mathbf{f} : E \to \mathbb{R}^m$ è continua in E (o continua in un punto $\mathbf{x}_0 \in E$) se tutte le componenti f_i sono continue in E (o continue in $\mathbf{x}_0 \in E$).

Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo e $\mathbf{r} : I \to \mathbb{R}^m$

$$\mathbf{r}(t) := \begin{pmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \\ \vdots \\ r_m(t) \end{pmatrix}.$$

- Se $\mathbf{r} : I \to \mathbb{R}^m$ è continua in I si dice che $\mathbf{r}$ è una curva in $\mathbb{R}^m$.
- Il sottoinsieme immagine: $\mathbf{r}(I) \subset \mathbb{R}^m$ si chiama supporto della curva (o sostegno o orbita della curva)

- $\mathbf{r} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ è definita da $\mathbf{r}(t) := \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$.

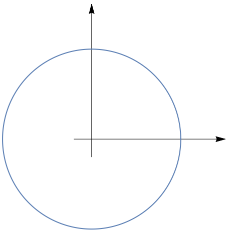


Figure: Il supporto di **r**.

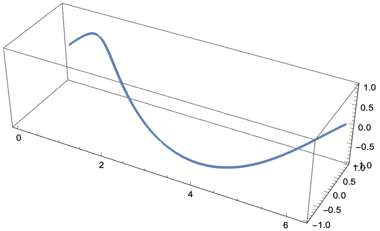


Figure: Il grafico di **r**.

$$\mathbf{s} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 \text{ è definita da } \mathbf{s}(t) := \begin{pmatrix} \cos(10t) \\ \sin(10t) \end{pmatrix}.$$

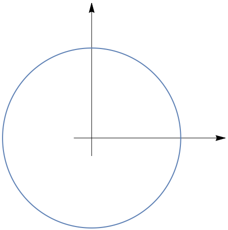


Figure: Il supporto di **s**.

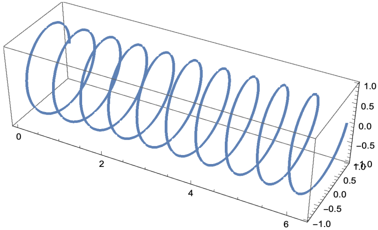


Figure: Il grafico di **s**.

- $\mathbf{r} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ è definita da $\mathbf{r}(t) := \begin{pmatrix} \cos t^3 \\ \sin t^3 \end{pmatrix}$.

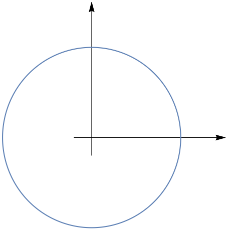


Figure: Il sostegno di **r**.

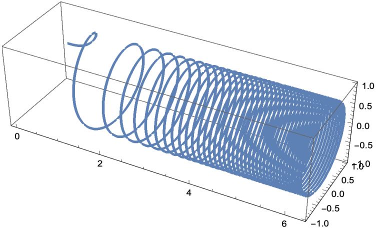
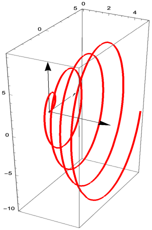
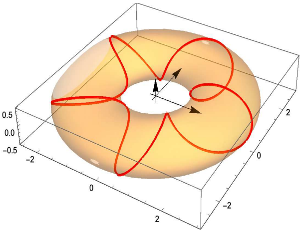


Figure: Il grafico di **r**.

Se $\mathbf{r} : I \to \mathbb{R}^3$ possiamo disegnare solo il supporto di $\mathbf{r}$.

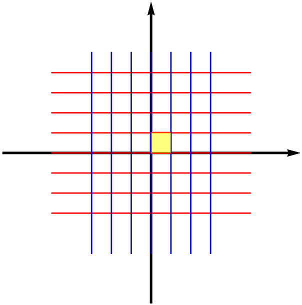


$$\mathbf{r}(t) := \begin{pmatrix} t^2/5 \\ t\cos(t^2) \\ 2t\sin(t^2) \end{pmatrix}$$

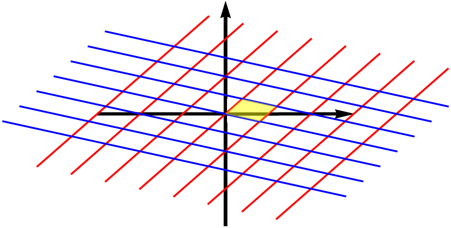


$$\mathbf{r}(t) := \begin{pmatrix} 2\cos(t)(1+\cos(5t)/2) \\ 2\sin(t)(1+\cos(5t)/2) \\ \sin(5t)/2 \end{pmatrix}$$

Azione della funzione lineare $\mathbf{L}(\mathbf{x}) := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -0.5 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

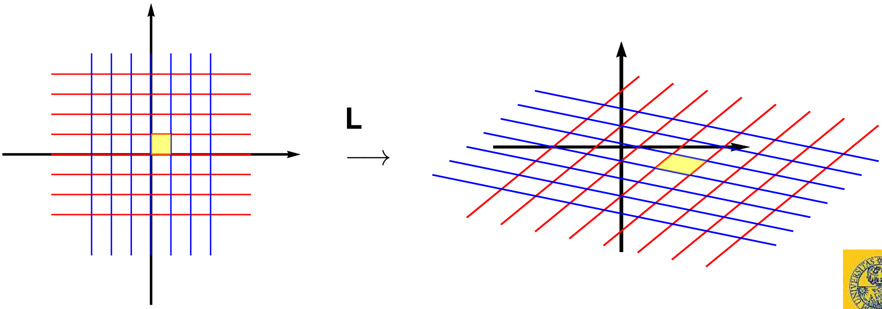


$\xrightarrow{\mathbf{L}}$



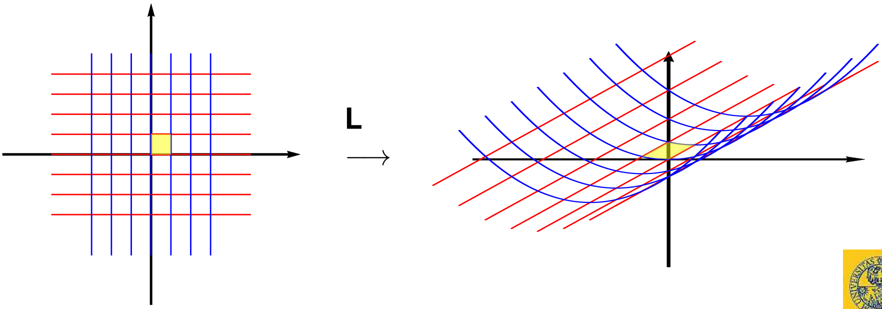
Azione della funzione affine

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}) := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -0.5 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.4 \\ -0.3 \end{pmatrix}$$



Azione della funzione

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} F_1(x,y) \\ F_1(x,y) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x - y \\ x + y^2 \end{pmatrix}$$



Definizione

Sia A aperto in $\mathbb{R}^n$. $\mathbf{f} : A \to \mathbb{R}^m$ si dice differenziabile in $\mathbf{x} \in A$ se ogni componente f_i è differenziabile in $\mathbf{x}$.

Se $f_1, \ldots, f_m$ sono differenziabili in $\mathbf{x}$

$$f_1(\mathbf{x}+\mathbf{h}) = f_1(\mathbf{x}) + \langle \nabla f_1(\mathbf{x}), \mathbf{h} \rangle + o_1(\|\mathbf{h}\|)$$
$$\vdots$$
$$f_m(\mathbf{x}+\mathbf{h}) = f_m(\mathbf{x}) + \langle \nabla f_m(\mathbf{x}), \mathbf{h} \rangle + o_m(\|\mathbf{h}\|)$$

che, scritto in forma vettoriale, diventa

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}+\mathbf{h}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h} + \mathbf{o}(\|\mathbf{h}\|).$$

$J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$, detta matrice Jacobiana di $\mathbf{f}$, è la matrice $m \times n$

$$J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) := \begin{bmatrix} \partial_1 f_1(\mathbf{x}) & \dots & \partial_n f_1(\mathbf{x}) \\ \partial_1 f_2(\mathbf{x}) & \dots & \partial_n f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_m(\mathbf{x}) & \dots & \partial_n f_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

Si ottiene quindi la

Definizione equivalente di differenziabilità

$\mathbf{f} : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è differenziabile in $\mathbf{x} \in A$ se la matrice Jacobiana $\mathbf{J}_f(\mathbf{x})$, è tale che, per $\mathbf{h} \to 0$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) = J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h} + \mathbf{o}(\|\mathbf{h}\|).$$

Il differenziale di $\mathbf{f}$ in $\mathbf{x}$ è la funzione lineare $d\mathbf{f}_{\mathbf{x}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$:

$$\mathbf{y} \mapsto d\mathbf{f}_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) := J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y}.$$

Example ($g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$)

$g : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è differenziabile in $t \in I$ se

$$g(t+h) = g(t) + g'(t)h + o(h) \qquad \text{per } h \to 0.$$

In questo caso

$$J_g(t) = g'(t).$$

Example ($f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$)

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è differenziabile in $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ se

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) = f(\mathbf{x}) + \langle \nabla f(\mathbf{x}), \mathbf{h} \rangle + o(\|\mathbf{h}\|) \qquad \text{per } \mathbf{h} \to 0.$$

$$\langle \nabla f(\mathbf{x}), \mathbf{h} \rangle = (\partial_{x_1} f(\mathbf{x}), \partial_{x_2} f(\mathbf{x})) \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

e

$$J_f(\mathbf{x}) = (\partial_{x_1} f(\mathbf{x}), \partial_{x_2} f(\mathbf{x})) = (\nabla f(\mathbf{x}))^T.$$

Example (ancora le curve)

Sia $\mathbf{r}: I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ definita da $\mathbf{r}(t)=\begin{pmatrix} r_1(t)\\ r_2(t)\end{pmatrix}$.

La curva $\mathbf{r}$ è differenziabile in t_0 se, per $h\to 0$,

$$\begin{aligned} r_1(t_0+h) &= r_1(t_0)+r_1'(t_0)h+o_1(h)\\ r_2(t_0+h) &= r_2(t_0)+r_2'(t_0)h+o_2(h)\end{aligned}$$

che, scritto in forma vettoriale,

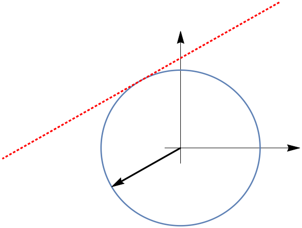
$$\mathbf{r}(t_0+h)=\mathbf{r}(t_0)+\mathbf{r}'(t_0)h+\mathbf{o}(h), \qquad \text{e:}$$

$$J_{\mathbf{r}}(t_0)=\mathbf{r}'(t_0):=\begin{bmatrix} r_1'(t_0)\\ r_2'(t_0)\end{bmatrix}.$$

Se $\mathbf{r}'(t_0) \neq \mathbf{0}$, il vettore $\mathbf{r}'(t_0)$ è il vettore tangente al supporto della curva $\mathbf{r}$ nel punto $\mathbf{r}(t_0)$ e la funzione

$$s \mapsto \mathbf{r}(t_0) + s\mathbf{r}'(t_0)$$

è una rappresentazione parametrica della retta tangente al supporto di $\mathbf{r}$ nel punto $\mathbf{r}(t_0)$.



Vettore tangente e retta tangente al supporto di $\mathbf{r}(t) := (\cos t, \sin t)$ nel punto $\mathbf{r}(2\pi/3)$.

Example ($\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$)

Sia $\mathbf{F} : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $\mathbf{F}(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} F_1(\mathbf{x}) \\ F_2(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$.

$\mathbf{F}$ è differenziabile in $\mathbf{x} \in A$ se

$$\begin{aligned} F_1(\mathbf{x}+\mathbf{h}) &= F_1(\mathbf{x}) + \langle \nabla F_1(\mathbf{x}), \mathbf{h} \rangle + o_1(\|\mathbf{h}\|) \qquad \text{per } \mathbf{h} \to 0 \\ F_2(\mathbf{x}+\mathbf{h}) &= F_2(\mathbf{x}) + \langle \nabla F_2(\mathbf{x}), \mathbf{h} \rangle + o_2(\|\mathbf{h}\|) \qquad \text{per } \mathbf{h} \to 0 \end{aligned}$$

e, in forma vettoriale,

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}+\mathbf{h}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}) + J_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h} + \mathbf{o}(\|\mathbf{h}\|) \qquad \text{per } \mathbf{h} \to 0.$$

In questo caso

$$J_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \partial_{x_1} F_1(\mathbf{x}) & \partial_{x_2} F_1(\mathbf{x}) \\ \partial_{x_2} F_1(\mathbf{x}) & \partial_{x_2} F_2(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

Le coordinate polari piane $\mathbf{P} : [0, +\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ sono definite

$$\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} \mapsto \mathbf{P}(r,\theta) = \begin{pmatrix} P_1(r,\theta) \\ P_2(r,\theta) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}.$$

$\mathbf{P}$ è differenziabile in ogni punto di $(0, +\infty) \times \mathbb{R}$.
La matrice Jacobiana $J_{\mathbf{P}}$ è la matrice 2×2

$$J_{\mathbf{P}}(r,\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}.$$

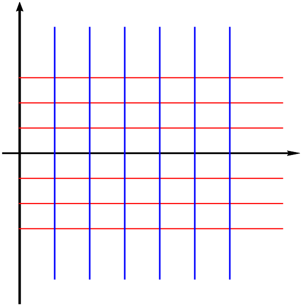


Figure: Dominio $[0, +\infty) \times \mathbb{R}$

$\xrightarrow{\mathbf{P}}$

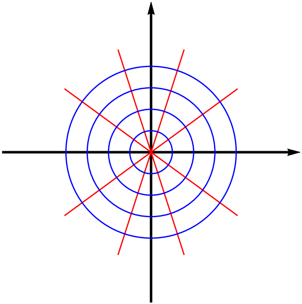


Figure: Codominio $\mathbb{R}^2$

Osservazione

La restrizione $\mathbf{P} : (0, +\infty) \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ è biunivoca.

Example ($\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$)

$\mathbf{F} : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} F_1(\mathbf{x}) \\ F_2(\mathbf{x}) \\ F_3(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

Se $\mathbf{F}$ è differenziabile in $\mathbf{x} \in A$ allora $J_{\mathbf{F}}(\mathbf{x})$ è la matrice 3×2

$$J_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \partial_1 F_1(\mathbf{x}) & \partial_2 F_1(\mathbf{x}) \\ \partial_1 F_2(\mathbf{x}) & \partial_2 F_2(\mathbf{x}) \\ \partial_1 F_3(\mathbf{x}) & \partial_2 F_3(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{R}^2 \ni \mathbf{x} \mapsto \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} (R + r\cos x_2)\cos x_1 \\ (R + r\cos x_2)\sin x_1 \\ r\sin x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

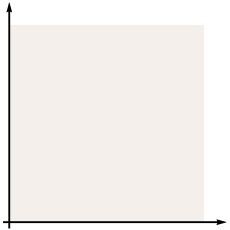


Figure: Dominio: $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$

$\xrightarrow{\mathbf{F}}$

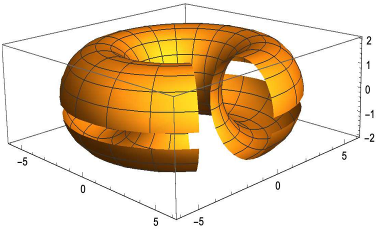


Figure: Immagine: superficie toroidale in $\mathbb{R}^3$

Le coordinate cilindriche $\mathbf{C} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ sono

$$\begin{pmatrix} \theta \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} C_1(\theta, z) \\ C_2(\theta, z) \\ C_3(\theta, z) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ z \end{pmatrix}.$$

$\mathbf{C}$ è differenziabile in ogni punto di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e la matrice Jacobiana è la matrice 3×2

$$J_{\mathbf{C}}(\theta, z) = \begin{bmatrix} -\sin\theta & 0 \\ \cos\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

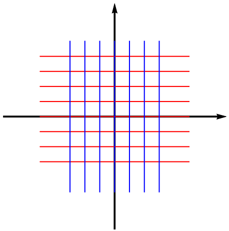


Figure: Dominio: $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$\overset{\mathbf{C}}{\longrightarrow}$

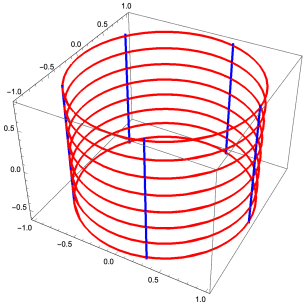


Figure: Cilindro contenuto in $\mathbb{R}^3$

Osservazione

La restrizione $\mathbf{C} : [0, 2\pi) \times \mathbb{R} \to \{\text{cilindro}\} \subset \mathbb{R}^3$ è biunivoca.

Sia $\mathbf{S} : [0, 2\pi) \times (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\begin{pmatrix} \theta \\ \phi \end{pmatrix} \mapsto \mathbf{S}(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} S_1(\theta, \phi) \\ S_2(\theta, \phi) \\ S_3(\theta, \phi) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi \\ \sin\theta\cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix}.$$

$\mathbf{S}$ è differenziabile in $(0, 2\pi) \times (-\pi/2, \pi/2)$; la matrice Jacobiana è la matrice 3×2

$$J_{\mathbf{S}}(\theta, \phi) = \begin{bmatrix} -\sin\theta\cos\phi & -\cos\theta\sin\phi \\ \cos\theta\cos\phi & -\sin\theta\sin\phi \\ 0 & \cos\phi \end{bmatrix}.$$

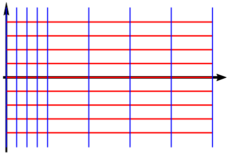


Figure: Dominio:
$[0, 2\pi) \times (-\pi/2, \pi/2)$

$\xrightarrow{}$
S

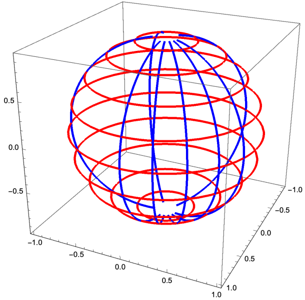


Figure: Superficie sferica di raggio 1 in $\mathbb{R}^3$

Osservazione

La restrizione $\mathbf{S} : [0, 2\pi) \times (-\pi/2, \pi/2) \to \{\text{superficie sferica meno i poli}\} \subset \mathbb{R}^3$ è biunivoca.

Example (Derivazione di funzioni composte: esempio)

Se $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sono derivabili allora $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è differenziabile e

$$\frac{d}{dx}(g \circ h)(x) = g'(h(x))h'(x).$$

Example (Derivazione di funzioni composte: esempio)

Se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sono differenziabili allora $h \circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è differenziabile e

$$\nabla(h \circ f)(\mathbf{x}) = h'(f(\mathbf{x}))\nabla f(\mathbf{x})$$

Example (Derivazione di funzioni composte: esempio)

Se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $\mathbf{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ sono differenziabili, allora $\mathbf{r} \circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$(\mathbf{r} \circ f)(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} r_1(f(\mathbf{x})) \\ r_2(f(\mathbf{x})) \end{pmatrix}$$

è differenziabile perché entrambe le componenti lo sono e

$$\begin{aligned} J_{\mathbf{r}\circ f}(\mathbf{x}) &= \begin{bmatrix} \partial_1(r_1 \circ f)(\mathbf{x}) & \partial_2(r_1 \circ f)(\mathbf{x}) \\ \partial_1(r_2 \circ f)(\mathbf{x}) & \partial_2(r_2 \circ f)(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} r_1'(f(\mathbf{x}))\partial_1 f(\mathbf{x}) & r_1'(f(\mathbf{x}))\partial_2 f(\mathbf{x}) \\ r_2'(f(\mathbf{x}))\partial_1 f(\mathbf{x}) & r_2'(f(\mathbf{x}))\partial_2 f(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} r_1'(f(\mathbf{x})) \\ r_2'(f(\mathbf{x})) \end{pmatrix} \cdot (\partial_1 f(\mathbf{x}), \partial_2 f(\mathbf{x})) = J_{\mathbf{r}}(f(\mathbf{x})) \cdot J_f((\mathbf{x}) \end{aligned}$$

Teorema: la regola della catena

Siano $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, $\mathbf{G} : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$ tali che sia definita

$$\mathbf{G} \circ \mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m.$$

Se $\mathbf{F}$ è differenziabile in $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ e se $\mathbf{G}$ è differenziabile in $\mathbf{y}_0 := \mathbf{F}(\mathbf{x}_0) \in \mathbb{R}^p$
allora $\mathbf{G} \circ \mathbf{F}$ è differenziabile in $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ e

$$J_{\mathbf{G} \circ \mathbf{F}}(\mathbf{x}_0) = J_{\mathbf{G}}(\mathbf{F}(\mathbf{x}_0)) J_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}_0).$$