Invertibilità locale
Funzioni definite implicitamente

Raul Paolo Serapioni

Analisi Matematica A – Secondo modulo
Corso di Laurea in Matematica
Università di Trento

Lezione 23

[Memo] Invertibilità locale di funzioni di una variabile

Sia A aperto in $\mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$, $f \in C^1(A)$. Se esiste $x_0 \in A$:

$$f'(x_0) \neq 0$$

allora

- f è localmente invertibile in (un intorno di) $\mathbf{x}_0$,
  cioè esistono intervalli aperti $I \ni x_0$ e $J \ni f(x_0)$ tali che

  $$f : I \to J$$

  è biunivoca (e quindi invertibile);
- f^{-1} è di classe C^1 in J e

  $$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \qquad \text{per } y \in J.$$

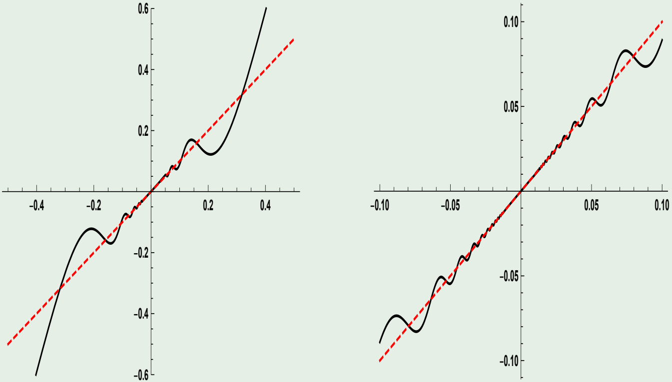
Example (L'ipotesi $f \in C^1(I)$ è necessaria.)

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da:

$$f(x) := \begin{cases} x + 2x^2 \sin(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

è derivabile per ogni $x \in \mathbb{R}$, $f'(0) = 1$ ma f non è invertibile in nessun intorno di 0.

Example



[Memo] Invertibilità di funzioni lineari

Se A è una matrice $n \times n$ e $\mathbf{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è la funzione lineare definita da

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}) := A \cdot \mathbf{x}$$

allora $\mathbf{L}$ è biunivoca se e solo se $\det A \neq 0$ e, in questo caso

$$\mathbf{L}^{-1}(\mathbf{x}) = A^{-1} \cdot \mathbf{x}.$$

Teorema di invertibilità locale

Sia $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$ aperto, $\mathbf{f} : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$, $\mathbf{f} \in C^1(\mathcal{A})$. Se

$$\text{esiste } \mathbf{x}_0 \in \mathcal{A}: \qquad \det J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0) \neq 0$$

allora

- $\mathbf{f}$ è localmente invertibile in (un intorno di) $\mathbf{x}_0$, cioè esistono due aperti $\mathcal{V} \ni \mathbf{x}_0$ e $\mathcal{W} \ni \mathbf{y}_0 := \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ tali che
$$\mathbf{f} : \mathcal{V} \to \mathcal{W}, \qquad \text{è biunivoca;}$$
- $\mathbf{f}^{-1} : \mathcal{W} \to \mathcal{V}$ è di classe C^1 in $\mathcal{W}$ e
$$J_{\mathbf{f}^{-1}}(\mathbf{y}) = \left[J_{\mathbf{f}} \left(\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y}) \right) \right]^{-1}$$
per tutti gli $\mathbf{y} \in \mathcal{W}$.

Teorema: (invertibilità locale e invertibilità globale in $\mathbb{R}$).

Sia I un intervallo e $f \in C(I)$.
Se, per ogni $x_0 \in I$, f è localmente invertibile in un intorno di $x_0 \in I$, allora

$$f : I \to f(I) \quad \text{è biunivoca}$$

e quindi f è globalmente invertibile.

Example (L'invertibilità locale non implica l'invertibilità globale)

$\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$\mathbf{f}(x, y) := (e^x \cos y)\mathbf{e}_1 + (e^x \sin y)\mathbf{e}_2$$

è localmente invertibile in ogni $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, infatti

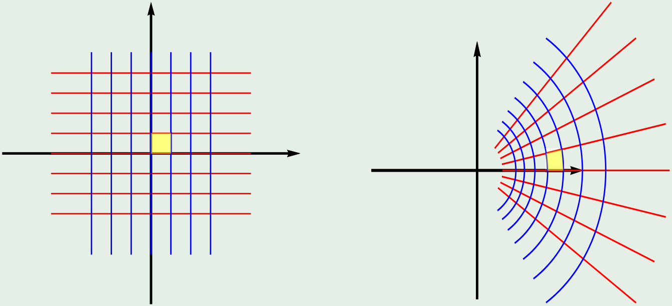
$$J_{\mathbf{f}}(x, y) = \begin{bmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{bmatrix}$$

e

$$\det J_{\mathbf{f}}(x_0, y_0) = e^{2x_0} \neq 0$$

ma non è globalmente invertibile (infatti non è iniettiva) su $\mathbb{R}^2$.

Example (L'azione di $\mathbf{f}(x, y) := (e^x \cos y)\mathbf{e}_1 + (e^x \sin y)\mathbf{e}_2$)



Le immagini delle rette verticali blu sono circonferenze con raggio e^x.
Le immagini delle rette orizzontali rosse sono semirette uscenti dall'origine.

Problema

In quali condizioni un'equazione

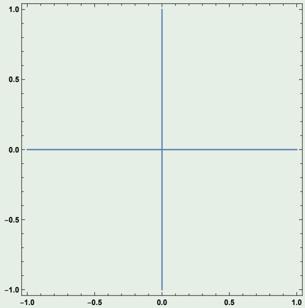
$$F(x, y) = 0$$

definisce una "linea regolare" nel piano?

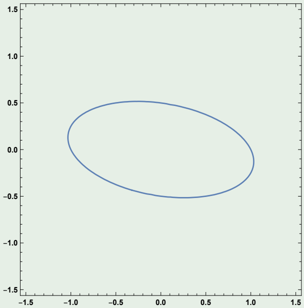
Example

- $x^2 + y^2 - 1 = 0$ definisce una circonferenza;
- $xy = 0$ definisce una coppia di rette.
- $4x^2 + xy + y^2 - 1 = 0$ definisce un'ellisse "ruotata";
- $x^3 + y^2 - 3xy = 0$
- $x^3 + y^2 - xy = 0$
- $\ldots$

Example

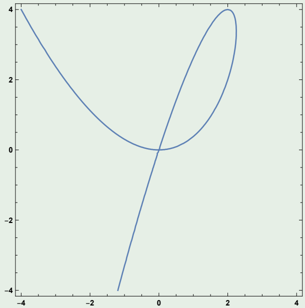


$xy = 0$

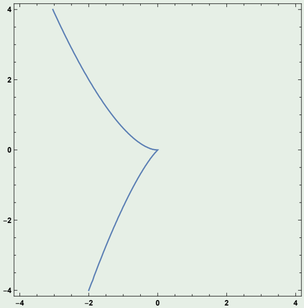


$4x^2 + xy + y^2 - 1 = 0$

Example

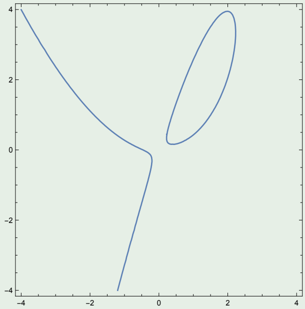


$x^3 + y^2 - 3xy = 0$

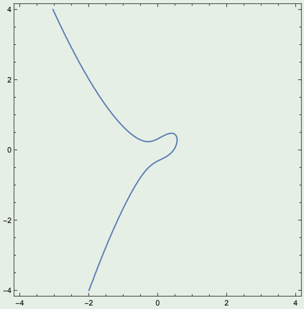


$x^3 + y^2 - xy = 0$

Example



$$x^3 + y^2 - 3xy + 0.1 = 0$$



$$x^3 + y^2 - xy - 0.1 = 0$$

Definizione: funzioni definite implicitamente

Sia $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$ e $F : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$. Diciamo che

$$\phi : I \to \mathbb{R} \qquad I \text{ intervallo in } \mathbb{R}$$

è definita implicitamente dall'equazione $F(x, y) = 0$ se $(x, \phi(x)) \in \mathcal{A}$ per ogni $x \in I$ e

$$F(x, \phi(x)) = 0, \qquad \text{per ogni } x \in I.$$

Analogamente $\psi : J \to \mathbb{R}$ è definita implicitamente se ... e $F(\psi(y), y) = 0$ per ogni $y \in J$.

Example

$$\phi_\pm : (-1,1) \to \mathbb{R}, \qquad \phi_\pm(x) := \pm\sqrt{1-x^2}$$

$$\psi_\pm : (-1,1) \to \mathbb{R}, \qquad \psi_\pm(y) := \pm\sqrt{1-y^2}$$

sono definite implicitamente dall'equazione

$$F(x,y) := x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

Infatti, per esempio,

$$F(x,\phi_+(x)) = x^2 + \phi_+(x)^2 - 1 = 0 \qquad \text{per } x \in (-1,1),$$

$$F(\psi_+(y),y) = \psi_+(y)^2 + y^2 - 1 = 0 \qquad \text{per } y \in (-1,1).$$

Teorema del Dini: ipotesi

Sia $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$ aperto, $F : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$, $F \in C^1(\mathcal{A})$.
Se esiste $(x_0, y_0) \in \mathcal{A}$:

$$F(x_0, y_0) = 0$$

$$\partial_y F(x_0, y_0) \neq 0$$

allora

Teorema del Dini: tesi

- esistono $\varepsilon > 0$ e $\delta > 0$ ed una *unica* ϕ

$$\phi : \mathcal{I}_\varepsilon \to \mathcal{J}_\delta,$$

$\mathcal{I}_\varepsilon := (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, $\mathcal{J}_\delta := (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$, tale che

$$\phi(x_0) = y_0, \qquad F(x, \phi(x)) = 0 \qquad \text{per } x \in \mathcal{I}_\varepsilon$$

- $\phi \in C^1(\mathcal{I}_\varepsilon)$ e

$$\phi'(x) = -\frac{\partial_x F(x, \phi(x))}{\partial_y F(x, \phi(x))} \qquad \text{per } x \in \mathcal{I}_\varepsilon.$$

Osservazione 1

Se l'ipotesi $\partial_y F(x_0, y_0) \neq 0$ fosse sostituita dalla simmetrica

$$\partial_x F(x_0, y_0) \neq 0$$

allora si prova l'esistenza di ψ, definita in un intorno di y_0, tale che

$$\psi(y_0) = x_0$$

e

$$F(\psi(y), y) = 0.$$

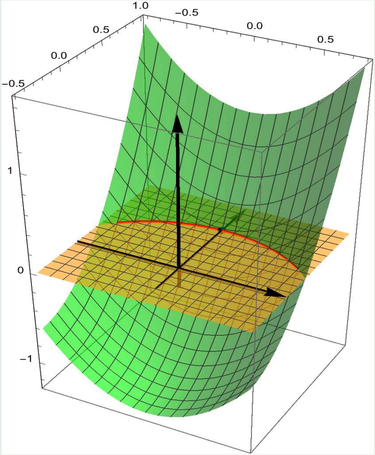
Osservazione 2

Il Teorema del Dini afferma che se $\nabla F(x_0, y_0) \neq 0$ allora l'insieme di livello "definito" dall'equazione

$$F(x, y) = F(x_0, y_0)$$

è una linea regolare perché è localmente grafico di una funzione di classe C^1.

Example



$$F(x,y) := x^2 + y^2 + y - 1$$
$$(x_0, y_0) := (0, (\sqrt{5} - 1)/2)$$
$$F(x_0, y_0) = 0$$
$$\partial_y F(x_0, y_0) > 0$$

Traccia di dimostrazione:

- Supponiamo $\partial_y F(x_0, y_0) > 0$.
  Poichè $F \in C^1(\mathcal{A})$ e $\partial_y F(x_0, y_0) > 0$ allora esistono $\varepsilon_1 > 0$ e $\delta > 0$ t.c.
  $$\partial_y F(x, y) > 0 \qquad \text{per ogni } x \text{ e } y \text{ t.c.}$$
  $x_0 - \varepsilon_1 < x < x_0 + \varepsilon_1$ e $y_0 - \delta < y < y_0 + \delta$.
- La funzione
  $$[y_0 - \delta, y_0 + \delta] \ni t \mapsto F(x_0, t)$$
  è strettamente crescente. Poiché $F(x_0, y_0) = 0$ ne segue che
  $$F(x_0, y_0 - \delta) < 0, \qquad F(x_0, y_0 + \delta) > 0.$$

- Esiste $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ tale che

$$\begin{cases} F(x, y_0 - \delta) < 0 \\ F(x, y_0 + \delta) > 0 \end{cases}$$

  per $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$.
- Per ogni $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$

$$\begin{cases} F(x, y_0 - \delta) < 0, \quad F(x, y_0 + \delta) > 0 \\ y \mapsto F(x, y) \quad \text{è strettamente crescente} \end{cases}$$

  quindi, per il Teorema degli zeri, esiste un unico $y = y(x)$ tale che

$$F(x, y(x)) = 0, \qquad \text{per ogni } x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon).$$

Abbiamo quindi dimostrato che esiste una unica funzione

$$\phi : (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \to (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$$

tale che

$$F(x, \phi(x)) = 0.$$

Resta da provare che ϕ è continua e derivabile.

- *Continuità di* ϕ:
  sia $\bar{x} \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ e $(x_n)_n$ t.c. $x_n \to \bar{x}$ per $n \to +\infty$.
  - Se $\phi(x_n) \to \bar{y}$ allora $\bar{y} = \phi(\bar{x})$. Infatti, per continuità di F
    $$0 = F(x_n, \phi(x_n)) \to F(\bar{x}, \bar{y}) \qquad \text{e quindi}$$
    $$F(\bar{x}, \bar{y}) = 0$$
    D'altra parte $\phi(\bar{x})$ è l'unico $y \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$ tale che $F(\bar{x}, y) = 0$. Quindi $\bar{y} = \phi(\bar{x})$.
  - $\phi(x_n)$ è limitata, quindi ogni sotto successione ha una sotto successione convergente, che converge a $\phi(\bar{x})$ per l'argomentazione precedente.

  Quindi abbiamo provato che
  $$\lim_{n \to +\infty} \phi(x_n) = \phi(\bar{x}).$$

- *Derivabilità di* ϕ:
  se $\mathbf{p}_1 := (x_1, \phi(x_1))$ e $\mathbf{p}_2 := (x_2, \phi(x_2))$, per il Teorema del valore intermedio, esiste $\mathbf{q}$ appartenente al segmento di estremi $\mathbf{p}_1$ e $\mathbf{p}_2$ tale che

$$\begin{aligned} 0 =& F(x_2, \phi(x_2)) - F(x_1, \phi(x_1)) = \langle \nabla F(\mathbf{q}), \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 \rangle \\ &= (\partial_x F(\mathbf{q}))\,(x_2 - x_1) + (\partial_y F(\mathbf{q}))\,(\phi(x_2) - \phi(x_1)) \end{aligned}$$

$$\frac{\phi(x_2) - \phi(x_1)}{x_2 - x_1} = -\frac{\partial_x F(\mathbf{q})}{\partial_y F(\mathbf{q})}$$

Se $x_2 \to x_1$ allora $\mathbf{p}_2 \to \mathbf{p}_1$ e $\mathbf{q} \to \mathbf{p}_1$ quindi

$$\phi'(x_1) := \lim_{x_2 \to x_1} \frac{\phi(x_2) - \phi(x_1)}{x_2 - x_1} = -\frac{\partial_x F(\mathbf{p}_1)}{\partial_y F(\mathbf{p}_1)}.$$

Parafrasi del teorema del Dini

Sia $\mathcal{A}$ aperto in $\mathbb{R}^2$, $f \in C^1(\mathcal{A})$.
Il Teorema del Dini afferma che se

$$\nabla F(\mathbf{p}) \neq 0, \qquad \text{per ogni } \mathbf{p} \in \mathcal{A}$$

allora
le linee di livello di F in $\mathcal{A}$ sono linee regolari, cioè sono localmente grafici di funzioni di classe C^1.

Siamo nelle ipotesi e con le notazioni del Teorema del Dini. L'equazione della retta tangente al grafico di ϕ nel punto $\mathbf{x}^0 := (x_0, y_0) = (x_0, \phi(x_0))$ è:

$$y = \phi(x_0) + \phi'(x_0)(x - x_0) = y_0 - \frac{\partial_x F(x_0, y_0)}{\partial_y F(x_0, y_0)}(x - x_0),$$

equivalentemente

$$\partial_x F(x_0, y_0)(x - x_0) + \partial_y F(x_0, y_0)(y - y_0) = 0.$$

e, in notazione vettoriale

$$\langle \nabla F(\mathbf{x}^0), \mathbf{x} - \mathbf{x}^0 \rangle = 0.$$

Corollario del teorema del Dini

Nelle stesse ipotesi e notazioni del Teorema del Dini, supponiamo ulteriormente che

$$F \in C^2(\mathcal{A}).$$

Allora la funzione definita implicitamente ϕ è più regolare:

$$\phi \in C^2((x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)).$$

Più in generale: se per $k > 1$, $F \in C^K(\mathcal{A})$ allora $\phi \in C^k$.

Traccia di dimostrazione:
Se $F \in C^2(\mathcal{A})$ allora $\partial_x F$ e $\partial_y F \in C^1(\mathcal{A})$.
Poichè $\phi \in C^1(\mathcal{I}_\varepsilon)$ allora anche le funzioni composte

$$x \mapsto (\partial_x F)(x, \phi(x)) \in C^1(\mathcal{I}_\varepsilon),$$

$$x \mapsto (\partial_y F)(x, \phi(x)) \in C^1(\mathcal{I}_\varepsilon).$$

Quindi

$$x \mapsto \phi'(x) = -\frac{(\partial_x F)(x, \phi(x))}{(\partial_y F)(x, \phi(x))} \in C^1(\mathcal{I}_\varepsilon)$$

e infine

$$\phi \in C^2(\mathcal{I}_\varepsilon).$$

$\square$