

Teorema del Dini in più di due variabili

Linee e superfici regolari

Raul Paolo Serapioni

Analisi Matematica A – Secondo modulo
Corso di Laurea in Matematica
Università di Trento

Lezione 24



Ancora su funzioni definite implicitamente

Sia $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^3$ e $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$. Diciamo che

$$\phi : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathcal{B} \subset \mathbb{R}^2$$

è **definita implicitamente dall'equazione $F(x, y, z) = 0$** se
 $(x, y, \phi(x, y)) \in \mathcal{A}$ e

$$F(x, y, \phi(x, y)) = 0 \quad \text{per ogni } (x, y) \in \mathcal{B}.$$



Analogamente

$\psi : \mathcal{E} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ è definita implicitamente se ... e

$$F(x, \psi(x, z), z) = 0, \quad \text{per ogni } (x, z) \in \mathcal{E}$$

oppure

$\eta : \mathcal{F} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \dots$

$$F(\eta(y, z), y, z) = 0, \quad \text{per ogni } (y, z) \in \mathcal{F}.$$



Example

Le funzioni

$$\begin{cases} \phi_{\pm} : \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\} \rightarrow \mathbb{R} \\ \phi_{\pm}(x, y) := \pm\sqrt{1 - x^2 - y^2} \end{cases}$$

oppure

$$\begin{cases} \psi_{\pm} : \{(x, z) : x^2 + z^2 < 1\} \rightarrow \mathbb{R} \\ \psi_{\pm}(x, z) := \pm\sqrt{1 - x^2 - z^2} \end{cases}$$

sono **definite implicitamente** dall'equazione

$$F(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0.$$



Teorema del Dini (*Ipotesi*)

Sia $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^3$ aperto, $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$, $F \in C^1(\mathcal{A})$.

Se esiste $\mathbf{x}^0 := (x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{A}$:

$$F(x_0, y_0, z_0) = 0,$$

$$\partial_z F(x_0, y_0, z_0) \neq 0,$$

allora



Teorema del Dini (*Tesi*)

- esistono $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ ed una *unica* funzione continua ϕ

$$\phi : \mathcal{Q}_\varepsilon := (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \times (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon) \rightarrow (z_0 - \delta, z_0 + \delta),$$

tale che

$$\phi(x_0, y_0) = z_0,$$

$$F(x, y, \phi(x, y)) = 0, \quad \text{per } (x, y) \in \mathcal{Q}_\varepsilon.$$

- ϕ è di classe C^1 in \mathcal{Q}_ε e

$$\begin{cases} \partial_x \phi(x, y) = -\frac{\partial_x F(x, y, \phi(x, y))}{\partial_z F(x, y, \phi(x, y))} \\ \partial_y \phi(x, y) = -\frac{\partial_y F(x, y, \phi(x, y))}{\partial_z F(x, y, \phi(x, y))} \end{cases} \quad \text{per } (x, y) \in \mathcal{Q}_\varepsilon.$$



Nelle ipotesi del teorema del Dini, l'equazione del piano tangente al grafico di ϕ nel punto

$$\mathbf{x}^0 := (x_0, y_0, z_0) := (x_0, y_0, \phi(x_0, y_0))$$

è

$$z - \phi(x_0, y_0) = \partial_x \phi(x_0, y_0)(x - x_0) + \partial_y \phi(x_0, y_0)(y - y_0)$$

e quindi

$$z - z_0 = -\frac{\partial_x F(x_0, y_0, z_0)}{\partial_z F(x_0, y_0, z_0)}(x - x_0) - \frac{\partial_y F(x_0, y_0, z_0)}{\partial_z F(x_0, y_0, z_0)}(y - y_0)$$

e, in forma vettoriale

$$\langle \nabla F(\mathbf{x}^0), \mathbf{x} - \mathbf{x}^0 \rangle = 0$$



Il Teorema del Dini afferma che, se $F \in C^1(\mathcal{A})$ e se

$$\nabla F(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}, \quad \text{per } \mathbf{x} \in \mathcal{A}$$

allora, le superfici di livello di F contenute nell'aperto \mathcal{A} ,
"definite" da equazioni del tipo

$$F(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}^0)$$

sono **superfici regolari**, perché localmente coincidenti con
grafici di funzioni di due variabili di classe C^1 , e i cui piani
tangenti hanno equazione

$$\langle \nabla F(\mathbf{x}^0), \mathbf{x} - \mathbf{x}^0 \rangle = 0.$$



Teorema del Dini (*Formulazione generale*)

Sia $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ aperto, $n \geq 1$, $F \in C^1(\mathcal{A})$. Se esiste $(\mathbf{x}^0, y^0) \in \mathcal{A}$ tale che

$$F(\mathbf{x}^0, y^0) = 0, \quad (\partial_{n+1} F)(\mathbf{x}^0, y^0) \neq 0$$

allora,

- esistono un aperto $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ con $\mathbf{x}^0 \in \mathcal{U}$ e una unica $\phi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$, $\phi \in C^1(\mathcal{U})$ tale che

$$\phi(\mathbf{x}^0) = y^0, \quad F(\mathbf{x}, \phi(\mathbf{x})) = 0, \quad \text{per } \mathbf{x} \in \mathcal{U}$$

-

$$\partial_i \phi(\mathbf{x}) = -\frac{\partial_i F(\mathbf{x}, \phi(\mathbf{x}))}{\partial_{n+1} F(\mathbf{x}, \phi(\mathbf{x}))}, \quad \text{per } i = 1, \dots, n \text{ e } \mathbf{x} \in \mathcal{U}.$$



Memo

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + b_1 = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + b_2 = 0 \end{cases}$$

Se, per esempio,

$$A_{(1,2)} := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{è non singolare,}$$

allora è possibile "esplicitare" x e y in funzione di z .

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (A_{(1,2)})^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -b_1 - a_{13}z \\ -b_2 - a_{23}z \end{pmatrix}$$



Teorema del Dini in versione vettoriale. (Ipotesi)

Sia $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^3$ aperto; $F_1, F_2 : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$; $F_1, F_2 \in C^1(\mathcal{A})$.
Se esiste $\mathbf{x}^0 := (x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{A}$:

$$\begin{cases} F_1(\mathbf{x}^0) = 0 \\ F_2(\mathbf{x}^0) = 0 \end{cases}$$

$$\det \begin{bmatrix} \partial_1 F_1 & \partial_2 F_1 \\ \partial_1 F_2 & \partial_2 F_2 \end{bmatrix} \Big|_{\mathbf{x}^0} \neq 0$$

allora



Teorema del Dini in versione vettoriale. (Tesi)

- esistono $\varepsilon > 0$ ed una *unica* $\phi := (\phi_1, \phi_2) \in C^1(\mathcal{I}_\varepsilon)$

$$\phi : \mathcal{I}_\varepsilon := (z_0 - \varepsilon, z_0 + \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^2$$

tale che

$$\begin{cases} \phi_1(z_0) = x_0 \\ \phi_2(z_0) = y_0 \end{cases}, \quad \begin{cases} F_1(\phi(z), z) = 0 \\ F_2(\phi(z), z) = 0 \end{cases} \quad \text{per } z \in \mathcal{I}_\varepsilon.$$

- Inoltre, per $J_\phi(\mathbf{z}) := \begin{bmatrix} \phi'_1 \\ \phi'_2 \end{bmatrix} \Big|_z$ vale

$$\begin{bmatrix} \phi'_1 \\ \phi'_2 \end{bmatrix} \Big|_z = - \begin{bmatrix} \partial_1 F_1 & \partial_2 F_1 \\ \partial_1 F_2 & \partial_2 F_2 \end{bmatrix}^{-1} \Big|_{(\phi(z), z)} \cdot \begin{bmatrix} \partial_3 F_1 \\ \partial_3 F_2 \end{bmatrix} \Big|_{(\phi(z), z)}$$



Example

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) := x^2 + y^2 - z = 0 \\ F_2(x, y, z) := x^2 + z^2 - y = 0 \end{cases}$$

Nel punto $\mathbf{x}^0 := (0, 1, 1)$ vale $F_1(\mathbf{x}^0) = F_2(\mathbf{x}^0) = 0$ inoltre

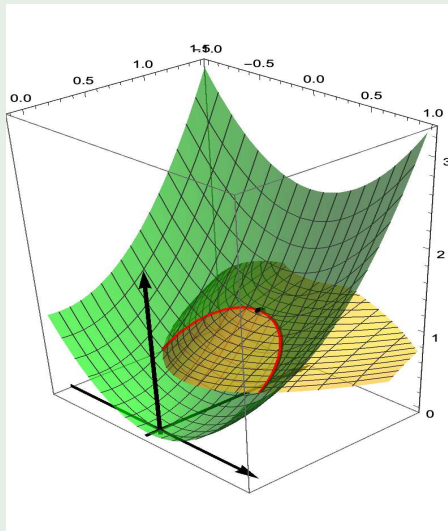
$$J(F_1, F_2) = \begin{bmatrix} 2x & 2y & -1 \\ 2x & -1 & 2z \end{bmatrix}$$

In \mathbf{x}^0 il minore $\begin{bmatrix} 2y & -1 \\ -1 & 2z \end{bmatrix}$ è non singolare. È quindi possibile esplicitare y e z in un intorno di $x = 0$. In questo caso si ottiene

$$\begin{cases} y = \phi_1(x) := \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{1 - 4x^2} \right) \\ z = \phi_2(x) := \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{1 - 4x^2} \right) \end{cases} \quad \text{per } x \in (-1/2, 1/2).$$



Example



Questa versione del Teorema del Dini afferma che, se $\mathbf{F} := F_1\mathbf{e}_1 + F_2\mathbf{e}_2 : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^2$, se $\mathbf{F} \in C^1(\mathcal{A})$ e se

$$\text{rank } J_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}) = 2, \quad \text{per } \mathbf{x} \in \mathcal{A}$$

allora, le curve contenute nell'aperto \mathcal{A} , e "definite" da un sistema di due equazioni del tipo

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}^0)$$

sono **curve regolari**, perché localmente coincidenti con grafici di funzioni di una variabile, di classe C^1 , a valori in \mathbb{R}^2 .

Le rette tangenti a tali curve sono soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \langle \nabla F_1(\mathbf{x}^0), \mathbf{x} - \mathbf{x}^0 \rangle = 0 \\ \langle \nabla F_2(\mathbf{x}^0), \mathbf{x} - \mathbf{x}^0 \rangle = 0. \end{cases}$$



Teorema del Dini: versione vettoriale generale.

Sia $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^{n+m}$ aperto; $\mathbf{F} : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^m$; $\mathbf{F} \in C^1(\mathcal{A})$.

Se esiste $(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) \in \mathcal{A}$:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) = \mathbf{0}; \quad \det [\partial_{\mathbf{y}} \mathbf{F}]|_{(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0)} \neq 0$$

allora

- esistono un aperto $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ con $\mathbf{x}^0 \in \mathcal{U}$ e una unica $\phi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\phi \in C^1(\mathcal{U})$ tale che

$$\phi(\mathbf{x}^0) = \mathbf{y}^0, \quad \mathbf{F}(\mathbf{x}, \phi(\mathbf{x})) = \mathbf{0}, \quad \text{per } \mathbf{x} \in \mathcal{U}$$

-

$$J_{\phi}(\mathbf{x}) = - [\partial_{\mathbf{y}} \mathbf{F}]|_{(\mathbf{x}, \phi(\mathbf{x}))}^{-1} \cdot [\partial_{\mathbf{x}} \mathbf{F}]|_{(\mathbf{x}, \phi(\mathbf{x}))}, \quad \text{per } \mathbf{x} \in \mathcal{U}.$$



Abbiamo usato le notazioni:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := x_1 \mathbf{e}_1 + \cdots + x_n \mathbf{e}_n + y_1 \mathbf{e}_{n+1} + \cdots + y_m \mathbf{e}_{n+m};$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := F_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{e}_1 + \cdots + F_m(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{e}_m;$$

$$[\partial_{\mathbf{y}} \mathbf{F}] := \begin{bmatrix} \partial_{y_1} F_1 & \cdots & \partial_{y_m} F_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_{y_1} F_m & \cdots & \partial_{y_m} F_m \end{bmatrix}, \quad \text{matrice } m \times m.$$

$$[\partial_{\mathbf{x}} \mathbf{F}] := \begin{bmatrix} \partial_{x_1} F_1 & \cdots & \partial_{x_n} F_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_{x_1} F_m & \cdots & \partial_{x_n} F_m \end{bmatrix}, \quad \text{matrice } m \times n.$$



Sia $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$ aperto, $\mathbf{f} : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\mathbf{f} \in C^1(\mathcal{A})$,

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{f}(\mathbf{x}) := f_1(\mathbf{x})\mathbf{e}_1 + \cdots + f_3(\mathbf{x})\mathbf{e}_3.$$

Denotiamo

$$S := \{\mathbf{f}(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \mathcal{A}\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Problema

L'insieme S è una "superficie regolare" in \mathbb{R}^3 ?



Se $\mathbf{x}^0 \in \mathcal{A}$, esiste $\varepsilon > 0$ tale che, per un qualsiasi versore $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$, il segmento

$$I_{\mathbf{v}} := \{\mathbf{x}^0 + t\mathbf{v} : -\varepsilon < t < \varepsilon\} \subset \mathcal{A}.$$

Denotiamo: $\mathbf{r}_{\mathbf{v}} : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$ la curva

$$\mathbf{r}_{\mathbf{v}}(t) := \mathbf{f}(\mathbf{x}^0 + t\mathbf{v})$$

e $\gamma_{\mathbf{v}}$ il supporto di $\mathbf{r}_{\mathbf{v}}$.

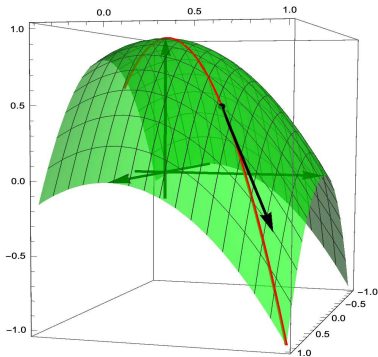
- $\gamma_{\mathbf{v}} \subset S$:
- poiché $\mathbf{f} \in C^1(\mathcal{A})$, anche $\mathbf{r}_{\mathbf{v}} \in C^1((-\varepsilon, \varepsilon))$ e

$$\mathbf{r}'_{\mathbf{v}}(t) = J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}^0 + t\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \partial_1 f_1 & \partial_2 f_1 \\ \partial_1 f_2 & \partial_2 f_2 \\ \partial_1 f_3 & \partial_2 f_3 \end{bmatrix} \Big|_{(\mathbf{x}^0 + t\mathbf{v})} \cdot \mathbf{v}$$



Definizione

Diciamo che $\mathbf{r}'_v(0)$ è un **vettore tangente alla superficie S** nel punto $\mathbf{p}^0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}^0)$



$$\mathbf{r}_{\mathbf{e}_1}(t) := \mathbf{f}(\mathbf{x}^0 + t\mathbf{e}_1)$$

$$\mathbf{r}_{\mathbf{e}_2}(t) := \mathbf{f}(\mathbf{x}^0 + t\mathbf{e}_2)$$

I rispettivi vettori tangenti in $\mathbf{p}^0 := \mathbf{f}(\mathbf{x}^0) = \mathbf{r}(0)$ sono

$$\mathbf{r}'_{\mathbf{e}_1}(0) := (\partial_1 f_1)(\mathbf{x}^0) \mathbf{e}_1 + (\partial_1 f_2)(\mathbf{x}^0) \mathbf{e}_2 + (\partial_1 f_3)(\mathbf{x}^0) \mathbf{e}_3;$$

$$\mathbf{r}'_{\mathbf{e}_2}(0) := (\partial_2 f_1)(\mathbf{x}^0) \mathbf{e}_1 + (\partial_2 f_2)(\mathbf{x}^0) \mathbf{e}_2 + (\partial_2 f_3)(\mathbf{x}^0) \mathbf{e}_3.$$

Osservazione

Se $\mathbf{r}'_{\mathbf{e}_1}(0)$ e $\mathbf{r}'_{\mathbf{e}_2}(0)$ sono linearmente indipendenti allora individuano in modo univoco un sottospazio affine.



Definizione di piano tangente

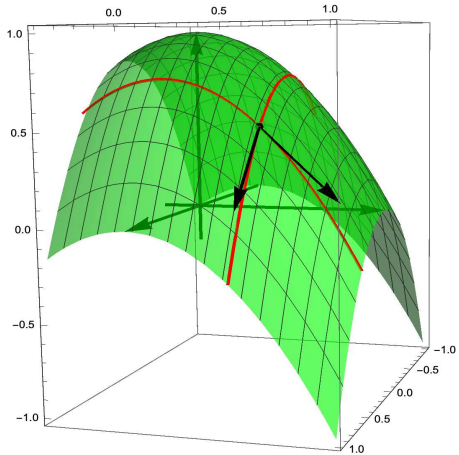
Se $\text{rank} J_f(\mathbf{x}^0) = 2$,

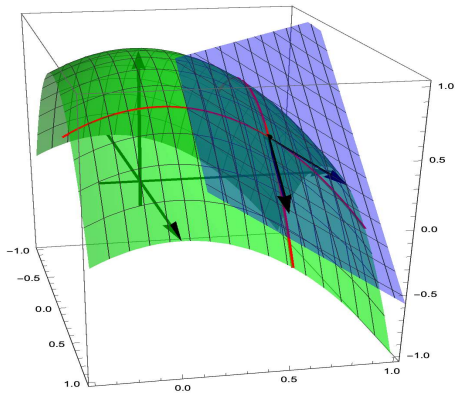
- $\mathbf{r}'_{\mathbf{e}_1}(0)$ e $\mathbf{r}'_{\mathbf{e}_2}(0)$ sono non nulli;
- $\mathbf{r}'_{\mathbf{e}_1}(0)$ e $\mathbf{r}'_{\mathbf{e}_2}(0)$ sono linearmente indipendenti.

Definiamo **piano tangente** a S in \mathbf{p}^0 l'immagine della funzione affine $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$(s, t) \mapsto \mathbf{p}^0 + s\mathbf{r}'_{\mathbf{e}_1}(0) + t\mathbf{r}'_{\mathbf{e}_2}(0).$$







Le linee regolari in \mathbb{R}^2 sono state studiate in tre modi distinti

- 1 come **grafici** di funzioni $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 ;
- 2 come **luoghi di zero** (o linee di livello) di funzioni $F : \mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 e con gradiente non singolare;
- 3 come **immagini di curve** regolari cioè come immagini di funzioni $\mathbf{r} : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ di classe C^1 e tali che $\mathbf{r}'(t) \neq 0$.



Le superfici regolari in \mathbb{R}^3 sono state studiate in tre modi distinti

- 1 come **grafici** di funzioni $f : E \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 ;
- 2 come **luoghi di zero** (o superfici di livello) di funzioni $F : \mathcal{A} \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 e con gradiente non singolare;
- 3 come **immagini di parametrizzazioni** regolari cioè come immagini di funzioni $\mathbf{f} : \mathcal{B} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ di classe C^1 e tali che $\text{rank}(\mathbf{J}_{\mathbf{f}})(\mathbf{x}) = 2$ per $\mathbf{x} \in \mathcal{B}$.



Grafici

Sia $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Se $f \in C^1(I)$ e Γ è il grafico di f , allora

$$\Gamma := \{(x, f(x)) : x \in I\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

è una linea regolare in $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

La retta tangente a Γ in $\mathbf{p}^0 := (x_0, f(x_0)) \in \Gamma$ è il grafico della funzione affine

$$x \mapsto f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$



Linee di livello

Sia $F : \mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Se

$$F \in C^1(\mathcal{A}), \quad \nabla F(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0} \quad \text{per } \mathbf{x} \in \mathcal{A}$$

allora la linea di livello Γ

$$\Gamma := \{\mathbf{x} : F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{x}^0) = 0\}$$

è una linea regolare.

La retta tangente a Γ in $\mathbf{p}^0 \in \Gamma$ è la retta di equazione

$$\langle \nabla F(\mathbf{p}^0), \mathbf{x} - \mathbf{p}^0 \rangle = 0.$$



Immagini di curve

Sia $\mathbf{r} : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$. Se

$$\mathbf{r} \in C^1(I), \quad \mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0} \quad \text{per } t \in I$$

allora l'insieme immagine $\Gamma := \mathbf{r}(I)$

$$\Gamma := \{\mathbf{r}(t) : t \in I\}$$

è una linea regolare in \mathbb{R}^2 (tranne che in "pochi" punti eccezionali).

La retta tangente a Γ in $\mathbf{p}^0 := \mathbf{r}(t_0)$ è l'immagine della funzione affine

$$t \mapsto \mathbf{r}(t_0) + \mathbf{r}'(t_0) t.$$



Grafici di funzioni di due variabili

Sia $f : \mathcal{E} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Se $f \in C^1(\mathcal{E})$ e S è il grafico di f , allora

$$S := \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in \mathcal{E}\} \subset \mathcal{E} \times \mathbb{R}$$

è una superficie regolare in \mathbb{R}^3 .

Il piano tangente a S in $\mathbf{p}^0 := (x_0, y_0, f(x_0, y_0)) \in S$ è il grafico della funzione affine $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$(x, y) \mapsto f(x_0, y_0) + \partial_x f(x_0, y_0)(x - x_0) + \partial_y f(x_0, y_0)(y - y_0).$$



Superfici di livello

Sia $F : \mathcal{A} \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Se

$$F \in C^1(\mathcal{A}), \quad \nabla F(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0} \quad \text{per } \mathbf{x} \in \mathcal{A}$$

allora, per ogni $\mathbf{x}^0 \in \mathcal{A}$, la superficie di livello S

$$S := \{\mathbf{x} : F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{x}^0) = 0\}$$

è una superficie regolare.

Il piano tangente a S in $\mathbf{p}^0 \in S$ è il piano di equazione

$$\langle \nabla F(\mathbf{p}^0), \mathbf{x} - \mathbf{p}^0 \rangle = 0.$$



Superfici parametrizzate

Sia $\mathbf{f} := f_1 \mathbf{e}_1 + f_2 \mathbf{e}_2 + f_3 \mathbf{e}_3 : \mathcal{B} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Se

$$\mathbf{f} \in C^1(\mathcal{B}), \quad \text{rank}(\mathbf{J}_{\mathbf{f}})(\mathbf{x}) = 2 \quad \text{per } \mathbf{x} \in \mathcal{B}$$

allora l'insieme immagine $S := \mathbf{f}(\mathcal{B})$

$$S := \{\mathbf{f}(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \mathcal{B}\}$$

è una superficie regolare in \mathbb{R}^3 (tranne che in sottoinsiemi eccezionali "piccoli").

Il piano tangente in $\mathbf{p}^0 := \mathbf{f}(\mathbf{x}^0) \in S$ è l'immagine della funzione affine

$$(t, s) \mapsto \mathbf{f}(\mathbf{x}^0) + t(\partial_1 \mathbf{f})(\mathbf{x}^0) + s(\partial_2 \mathbf{f})(\mathbf{x}^0).$$

