Estremi vincolati

Raul Paolo Serapioni

Analisi Matematica A – Secondo modulo
Corso di Laurea in Matematica
Università di Trento

Lezione 25

Supponiamo che:

- A sia un aperto di $\mathbb{R}^2$, $f : A \to \mathbb{R}$ e $f \in C^1(A)$;
- $\mathbf{r} : (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \to A$ sia una curva C^1 con $\mathbf{r}'(t) \neq 0$;
- γ sia il supporto di $\mathbf{r}$;
- $\mathbf{r}(t_0)$ sia il punto di massimo (o di minimo) di f su γ, cioè

$$f(\mathbf{r}(t_0)) \geq f(\mathbf{r}(t)), \qquad \text{per ogni } t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon).$$

Allora,

$$f \circ \mathbf{r} : (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \to \mathbb{R}$$

è derivabile e ha un punto di massimo in t_0, quindi

$$0 = \frac{d}{dt}(f \circ \mathbf{r})_{|t=t_0} = \partial_1 f_{|\mathbf{r}(t_0)}\, r_1'(t_0) + \partial_2 f_{|\mathbf{r}(t_0)}\, r_2'(t_0).$$

Se

- $f \in C^1(A)$,
- $\mathbf{r}$ è una curva di classe C^1, contenuta in A e $\mathbf{r}'(t) \neq 0$,
- $\mathbf{r}(t_0)$ è un punto di massimo/minimo locale di f ristretto al supporto di $\mathbf{r}$, cioè esiste $\varepsilon > 0$ tale che

$$\max_{(t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon)} f(\mathbf{r}(t)) = f(\mathbf{r}(t_0)),$$

allora,

$$\langle (\nabla f)_{|\mathbf{r}(t_0)}, \mathbf{r}'(t_0) \rangle = 0,$$

o, equivalentemente,
nei punti di massimo/minimo locale vincolati la componente del gradiente tangenziale al vincolo è nulla.

Definizione

Sia $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$, f e $F : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$.
(x_0, y_0) è un punto di massimo di f vincolato a $F(x, y) = 0$ se

- $F(x_0, y_0) = 0$
- $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ per ogni (x, y) tale che $F(x, y) = 0$.

Analogamente
(x_0, y_0) è un punto di massimo locale di f vincolato a $F(x, y) = 0$ se

- $F(x_0, y_0) = 0$
- se esiste $r > 0$ tale che $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ per ogni $(x, y) \in B((x_0, y_0), r)$ tale che $F(x, y) = 0$.

Teorema

Sia $\mathcal{A}$ aperto in $\mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) \in \mathcal{A}$.
Supponiamo che $F : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ sia di classe C^1 in $\mathcal{A}$ e che

- $F(x_0, y_0) = 0$ e $\nabla F(x_0, y_0) \neq 0$.

Se $g : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ è di classe C^1, se (x_0, y_0) è un punto di massimo o minimo locale di g vincolato a $F(x, y) = 0$ allora

$$\text{esiste } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tale che} \quad \nabla g(x_0, y_0) = \lambda \nabla F(x_0, y_0).$$

Definizione

Sia $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$, f e $F : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$.
(x_0, y_0) è un punto di massimo di f vincolato a $F(x, y) = 0$ se

- $F(x_0, y_0) = 0$
- $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ per ogni (x, y) tale che $F(x, y) = 0$.

Analogamente
(x_0, y_0) è un punto di massimo locale di f vincolato a $F(x, y) = 0$ se

- $F(x_0, y_0) = 0$
- se esiste $r > 0$ tale che $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ per ogni $(x, y) \in B((x_0, y_0), r)$ tale che $F(x, y) = 0$.

Teorema (uguale in 3 variabili)

Sia $\mathcal{A}$ aperto in $\mathbb{R}^3$, $(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{A}$.
Supponiamo che $F : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ sia di classe C^1 in $\mathcal{A}$ e che

- $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ e $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq 0$.

Se $g : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ è di classe C^1, se (x_0, y_0, z_0) è un punto di massimo o minimo locale di g vincolato a $F(x, y, z) = 0$ allora

$$\text{esiste } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tale che} \quad \nabla g(x_0, y_0, z_0) = \lambda \nabla F(x_0, y_0, z_0).$$

Funzione di Lagrange in 2 variabili

I punti critici di $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vincolati al vincolo $F(x,y) = 0$ sono punti critici liberi della funzione di Lagrange

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) := f(x,y) - \lambda F(x,y)$$

cioè punti per i quali $\nabla_{x,y,\lambda}\mathcal{L}(x,y,\lambda) = 0$. Infatti

$$\nabla\mathcal{L}(x,y,\lambda) =$$
$$= (\partial_x f(x,y) - \lambda\partial_x F(x,y), \partial_y f(x,y) - \lambda\partial_y F(x,y), -F(x,y))$$

e la condizione $\nabla\mathcal{L}(x_0,y_0,\lambda_0) = 0$ è equivalente a

$$\begin{cases} \partial_x f(x_0,y_0) = \lambda_0\partial_x F(x_0,y_0) \\ \partial_y f(x_0,y_0) = \lambda_0\partial_y F(x_0,y_0) \\ F(x_0,y_0) = 0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} \nabla f(x_0,y_0) = \lambda\nabla F(x_0,y_0) \\ F(x_0,y_0) = 0 \end{cases}$$

Funzione di Lagrange in più di 2 variabili

I punti critici di $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ vincolati al vincolo $F(x, y, z) = 0$ sono punti critici liberi della funzione di Lagrange

$$\mathcal{L}(x, y, z, \lambda) := f(x, y, z) - \lambda F(x, y, z)$$

cioè punti per i quali $\nabla_{x,y,z,\lambda}\mathcal{L}(x, y, z, \lambda) = 0$. Infatti

$$\nabla_{x,y,z,\lambda}\mathcal{L} = (\nabla_{x,y,z} f - \lambda \nabla_{x,y,z} F, -F) = 0$$

e

$$\nabla_{x,y,z,\lambda}\mathcal{L}(x_0, y_0, z_0, \lambda_0) = 0$$

è equivalente a

$$\begin{cases} \nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda_0 \nabla F(x_0, y_0, z_0) \\ F(x_0, y_0, z_0) = 0 \end{cases}$$

Example (Problema 1)

Sia $C := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{x}\| = 1\}$, A una matrice 2×2 simmetrica e $q_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la forma quadratica associata:

$$q_A(\mathbf{x}) := \mathbf{x}^T \cdot A \cdot \mathbf{x}$$

Trovate punti e valori di massimo/minimo assoluto di q_A su C.

Example (Stesso problema in più di 2 variabili)

Sia $S := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{x}\| = 1\}$, A una matrice 3×3 simmetrica e $q_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma quadratica associata:

$$q_A(\mathbf{x}) := \mathbf{x}^T \cdot A \cdot \mathbf{x}$$

Trovate punti e valori di massimo/minimo assoluto di q_A su S.

- Cerchiamo i punti $\mathbf{y} \in C$ tali che

$$\nabla q_A(\mathbf{y}) = 2A \cdot \mathbf{y} \quad \text{sia ortogonale a } C \text{ in } \mathbf{y}.$$

- Poiché C è una linea di livello, per esempio, di $g(\mathbf{x}) := \|\mathbf{x}\|^2$

$$\nabla g(\mathbf{x}) = 2\mathbf{x} \quad \text{è ortogonale a } C \text{ in ogni suo punto.}$$

- Cerchiamo quindi i punti $\mathbf{y} \in C$, tali che

$$\nabla q_A(\mathbf{y}) \quad \text{è multiplo di } \nabla g(\mathbf{x}).$$

Equivalentemente, cerchiamo gli $\mathbf{y} \in C$ per i quali esiste $\lambda \neq 0$ tale che

$$A \cdot \mathbf{y} = \lambda \mathbf{y}$$

- I punti di massimo e minimo di q_A sul cerchio unitario C sono gli autovettori di norma unitaria di A.
Se $\mathbf{v}^1$ è l'autovettore associato all'autovalore λ^1

$$q_A(\mathbf{v}^1) := (\mathbf{v}^1)^T \cdot A \cdot \mathbf{v}^1 = (\mathbf{v}^1)^T \cdot \lambda^1 \mathbf{v}^1 = \lambda^1 \|\mathbf{v}^1\|^2 = \lambda^1.$$

Il massimo autovalore di A è il valore massimo della forma quadratica q_A sul cerchio unitario;
Il punto di massimo assoluto di q_A è l'autovettore associato al massimo autovalore.
Analogamente per il valore minimo e per il minimo autovalore.