Serie di potenze

Raul Paolo Serapioni

Analisi Matematica A – Secondo modulo
Corso di Laurea in Matematica
Università di Trento

Lezione 26

Vedi per esempio

- *Conti, Acquistapace, Savojni*: Analisi Matematica. Teoria e applicazioni, *Mc Graw Hill, Milano 2001*; cap. 2.
- *Pagani, Salsa*: Analisi Matematica 2, *Zanichelli, Milano 2016*: cap. 3, par. 2.2.
- *Bertsch, Dal Passo, Giacomelli*: Analisi Matematica, *Mc Graw-Hill, Milano 2011*; par. 9.3, 9.4.

Definizione

Siano $x \in \mathbb{R}$ e $(a_n)_n$ una successione a valori reali.

Una serie i cui addendi sono della forma

$$a_n x^n$$

si dice serie di potenze:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \ldots$$

- I numeri a_n si dicono *coefficienti della serie*.
- x va pensata come *variabile*.

Più in generale, se $x_0 \in \mathbb{R}$ si dicono serie di potenze anche serie i cui addendi sono della forma

$$a_n(x - x_0)^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\dots$$

Con il cambio di variabile

$$x \mapsto x - x_0$$

tutte le affermazioni vere per le serie del primo tipo si traducono in affermazioni vere per quelle del secondo.

Example

Le serie di Taylor (o la serie di MacLaurin) di una funzione infinitamente derivabile f

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{D^{(n)} f(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

sono serie di potenze.
$a_0 := f(x_0)$; $a_1 := Df(x_0)$; $a_2 := \frac{1}{2} D^{(2)} f(x_0)$; $\cdots$

Example

- Le serie geometriche del tipo

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(x - x_0)^n$$

  sono serie di potenze con coefficienti $a_0 = a_1 = a_2 = \cdots = 1$.
- Anche

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}$$

  è una serie di potenze con coefficienti: $a_0 = a_2 = a_4 = \cdots = 1$ e $a_1 = a_3 = a_5 = \cdots = 0$.

Problema

Per quali valori della variabile x una data serie di potenze è convergente?

Problema

Supponiamo che una serie di potenze converge per ogni $x \in I$ e indichiamo come

$$s(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad x \in I.$$

- Quali sono le proprietà della funzione $s : I \to \mathbb{R}$.
- È continua in I? È derivabile in I? È integrabile in I?

Example

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \qquad \text{converge per } x \in (-1,1).$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \text{converge per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n!x^n \qquad \text{converge solo per } x = 0.$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n} \qquad \text{converge per } x \in (-1,1).$$

Example

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \qquad \text{converge per ogni } x \in (-1, 1].$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2} \qquad \text{converge per ogni } x \in [-1, 1].$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{3^n} \qquad \text{converge per ogni } x \in (-3, 3).$$

Teorema

Se $r > 0$ e

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$$

è convergente allora la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

è assolutamente convergente, e quindi convergente, per ogni $x \in \mathbb{R}$ tale che $|x - x_0| < r$.

Traccia di prova:
Se $|x - x_0| < r$ allora $|a_n||x - x_0|^n < |a_n|r^n$. Per il teorema del confronto

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n||x - x_0|^n \qquad \text{converge.}$$

Per definizione, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ è assolutamente convergente. $\square$

Corollario

L'insieme di convergenza di $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ è un intervallo con centro in x_0.
L'intervallo può essere aperto, chiuso, semiaperto; può essere il solo punto x_0 o tutto $\mathbb{R}$.

Conclusione e Definizione di raggio di convergenza.

Per qualsiasi serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \qquad \text{vale uno dei casi seguenti:}$$

1. la serie converge solo per $x = x_0$;
2. la serie converge per ogni $x \in \mathbb{R}$;
3. esiste $R > 0$ tale che la serie converge assolutamente nell'intervallo $(x_0 - R, x_0 + R)$ e non converge per $|x - x_0| > R$.

R è detto raggio di convergenza della serie; nei primi due casi diciamo che $R = 0$, $R = \infty$.

Per la determinazione del raggio di convergenza:

Teorema di Cauchy.

Sia R il raggio di convergenza di $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$.
Sia

$$\ell := \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Allora

1. se $\ell = +\infty$ allora $R = 0$;
2. se $\ell = 0$ allora $R = +\infty$;
3. se $\ell > 0$ allora $R = 1/\ell$.

Teorema di D'Alembert.

Sia R il raggio di convergenza di $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$.
Sia

$$\ell := \limsup_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}.$$

Allora

1. se $\ell = +\infty$ allora $R = 0$;
2. se $\ell = 0$ allora $R = +\infty$;
3. se $\ell > 0$ allora $R = 1/\ell$.

Teorema (Abel 1826)

Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ ha raggio di convergenza $R > 0$ (oppure $R = +\infty$) e se

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n, \qquad \text{per } |x-x_0| < R,$$

allora vale che

- f è continua nell'intervallo $|x-x_0| < R$ (oppure per ogni $x \in \mathbb{R}$)
- f ha derivate di qualsiasi ordine per $|x-x_0| < R$ (oppure per ogni $x \in \mathbb{R}$)

- le derivate si calcolano "termine a termine"; cioè per $|x - x_0| < R$ (oppure per ogni $x \in \mathbb{R}$)

$$
\begin{aligned}
Df(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}, \\
D^{(2)} f(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x - x_0)^{n-2} \\
D^{(3)} f(x) &= \cdots
\end{aligned}
$$

Osservate che tutte le serie hanno lo stesso raggio di convergenza.

- in particolare
$$a_n = \frac{1}{n!} D^{(n)} f(x_0)$$
e quindi la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ è la serie di Taylor, con centro in x_0, della propria somma f;
- $$\int_{x_0}^{x} f(t)\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x - x_0)^{n+1}.$$

Definizione

Se I è un intervallo aperto.
$f : I \to \mathbb{R}$ si dice analitica in I se per ogni $x_0 \in I$ esiste $R > 0$ tale che

- $(x_0 - R, x_0 + R) \subset I$,
- f è somma di una serie di potenze in $(x_0 - R, x_0 + R)$.

Example (Esempi di funzioni analitiche)

- La funzione esponenziale e le funzioni trigonometriche $x \mapsto \sin x$ e $x \mapsto \cos x$ sono analitiche in $\mathbb{R}$:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots,$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{6} + \cdots,$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \cdots$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Example (Esempi di funzioni analitiche)

- La funzione logaritmo $x \mapsto \log(1+x)$ è analitica in $(-1,1)$ infatti se $|x| < 1$

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$

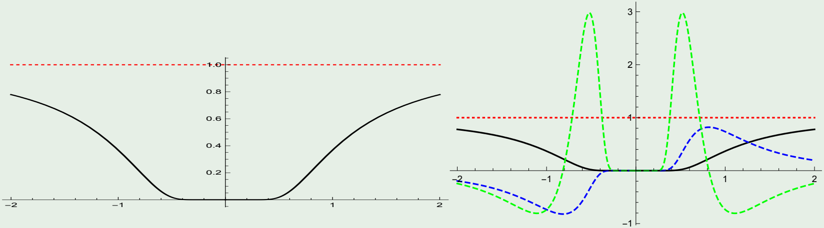
Example (*Esistono funzioni infinitamente derivabili, non analitiche*)

La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) := \begin{cases} 0 & x = 0 \\ e^{-1/x^2} & x \neq 0 \end{cases}$$

è infinitamente derivabile in $\mathbb{R}$ e, in $x = 0$, tutte le derivate di f di qualsiasi ordine sono nulle.
La serie di Taylor di f con centro in $x = 0$ è la serie identicamente nulla ed $f(x)$ non è la somma della propria serie di Taylor.
f non è analitica in nessun intervallo $(-R, R)$ con centro in 0.

Example (*Esistono funzioni infinitamente derivabili, non analitiche*)



Il grafico di $x \mapsto e^{-1/x^2}$ e di alcune sue derivate in un intorno dell'origine.

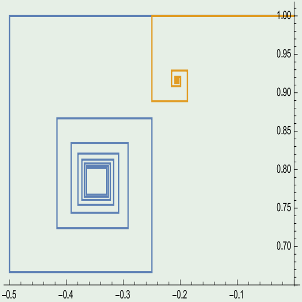
Se $z_n := a_n + ib_n$, $z := \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ allora

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n = z \quad \text{se e solo se} \quad \lim_{k\to+\infty} \sum_{n=0}^{k} z_n = z.$$

Se $\sum_{n=0}^{\infty} z_n = z$ diciamo che la serie è *convergente*.

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n = z \quad \text{se e solo se} \quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \alpha \\ \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \beta. \end{cases}$$

Example



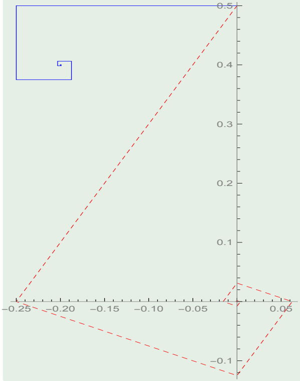
Le prime somme parziali delle serie convergenti

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n} = i - \frac{1}{2} - \frac{i}{3} + \frac{1}{4} - \cdots$$

e

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n^2} = i - \frac{1}{4} - \frac{i}{9} + \frac{1}{16} - \cdots$$

Example



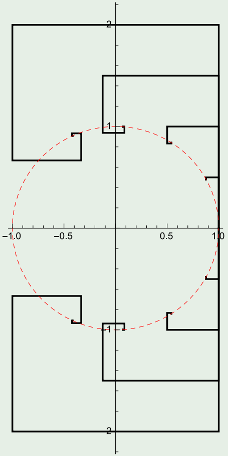
Addendi e somme parziali della serie convergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{2^n} = \frac{i}{2} - \frac{1}{4} - \frac{i}{8} + \dots$$

poiché $\sum_{n=1}^{k} \frac{i^n}{2^n} = \frac{1+(i/2)^{k+1}}{1-i/2} - 1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{2^n} = \frac{1}{1-i/2} - 1 = -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i.$$

Example



Alcune somme parziali di

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n \theta^n}{n!} \quad (= e^{i\theta})$$

per alcuni valori di θ.

Definizione

Se la serie di numeri reali $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ è convergente diciamo che

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n$$

è assolutamente convergente.

Se $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ è *assolutamente convergente* allora $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ è convergente.

Infatti

$$|a_n| \leq |z_n| \qquad |b_n| \leq |z_n|$$

quindi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ sono assolutamente convergenti, quindi convergenti e infine $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ è convergente.

Definizione

Se $z, z_0 \in \mathbb{C}$ e $a_n \in \mathbb{C}$, una serie i cui addendi sono della forma

$$a_n(z - z_0)^n,$$

è una serie di potenze in $\mathbb{C}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots$$

I numeri a_n sono i coefficienti della serie, z_0 è il centro, z viene pensata come variabile.

Valgono analoghe formulazioni dei Teoremi per serie di potenze nel campo reale.

Teorema

Se esiste $r > 0$ per il quale la serie reale $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$ è convergente allora la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

converge per ogni $z \in \mathbb{C}$ interna al disco $|z - z_0| < r$.

Teorema

Per qualsiasi serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

vale uno dei casi seguenti

1. la serie converge solo per $z = z_0$;
2. la serie converge per ogni $z \in \mathbb{C}$;
3. esiste $R > 0$ tale che la serie converge assolutamente nel disco $D_R := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$ e non converge per $|z| > R$.

R è detto raggio di convergenza della serie.

Example (La serie esponenziale e le serie trigonometriche)

La serie esponenziale

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

e le serie trigonometriche

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

convergono per ogni $z \in \mathbb{C}$.

Example (La serie esponenziale e le serie trigonometriche)

Le funzioni trigonometriche ed esponenziali possono essere definite in $\mathbb{C}$ utilizzando le serie di potenze precedenti:

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$$\sin z := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos z := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$