Gli insiemi $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$. Il principio di induzione

Raul Paolo Serapioni

Analisi Matematica 1
Analisi Matematica A – Primo modulo
Corsi di Laurea in Fisica e Matematica
Università di Trento

settembre 2019

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Classi di equivalenza di frazioni

Se $m, m', n, n' \in \mathbb{Z}$ e se $n \neq 0$ e $n' \neq 0$ allora

$$\frac{m}{n} \text{ è equivalente a } \frac{m'}{n'} \text{ se e solo se } mn' = m'n$$

La classe di equivalenza di $\frac{m}{n}$ è l'insieme di tutte le frazioni equivalenti a $\frac{m}{n}$.

$$\mathbb{Q} := \{\text{Classi di equivalenza di frazioni}\}$$

Le operazioni $+$ e $\cdot$ e l'ordinamento $<$ sono definiti nel modo usuale.

Espressioni decimali limitate e illimitate periodiche

Le frazioni hanno rappresentazioni decimali (quasi) uniche.

$$\frac{1}{4} = 0,25; \qquad \frac{4}{3} = 1,333\cdots = 1,\bar{3}; \qquad \frac{4}{30} = 0,1\bar{3}$$

Osservazione

$$0,\bar{9} = 1; \qquad 2,42\bar{9} = 2,43$$

$\mathbb{Q}$ è un campo ordinato

- La funzione $+ : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ ha le proprietà:

$$\begin{array}{rr} \text{per ogni } p, q, r \in \mathbb{Q} & p + q = q + p \\ & (p + q) + r = p + (q + r) \\ & p + 0 = p \\ \text{esiste l'opposto di ogni } p \in \mathbb{Q} & p + (-p) = 0 \end{array}$$

$\mathbb{Q}$ è un campo ordinato

- La funzione $\cdot : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ ha le proprietà:

$$\text{per ogni } p, q, r \in \mathbb{Q} \qquad \begin{aligned} p \cdot q &= q \cdot p \\ (p \cdot q) \cdot r &= p \cdot (q \cdot r) \\ p \cdot 1 &= p \\ p \cdot p^{-1} &= 1 \qquad \text{se } p \neq 0. \end{aligned}$$

- Proprietà distributiva: $\quad (p + q) \cdot r = p \cdot r + q \cdot r$
- Relazioni con ordine

$$\begin{aligned} p < q &\implies p + r < q + r \\ p < q \text{ e } 0 < r &\implies p \cdot r < q \cdot r. \end{aligned}$$

- $\mathbb{Q}$ è *denso* : fra due numeri qualsiasi esistono sempre infiniti numeri razionali.
- $\mathbb{Q}$ ha la *proprietà di Archimede*[1] (non esistono "infiniti" o "infinitesimi" in $\mathbb{Q}$):

$$\forall x > 0, \forall y > 0, \exists n \in \mathbb{N} : xn > y.$$

[1] Archimede di Siracusa (Siracusa c. 287- Siracusa c. 212 a.C.)

Principio di Induzione

Se A è un sottoinsieme di $\mathbb{N}$ tale che

$$(i): \quad 0 \in A$$
$$(ii): \quad se\ n \in A\ allora\ n+1 \in A$$

allora $A = \mathbb{N}$.

Variante del principio di Induzione

Sia $n_0 \in \mathbb{N}$. Se $A \subset \mathbb{N}$ è tale che

$$(i): \quad n_0 \in A$$
$$(ii): \quad se\ n \in A\ allora\ n+1 \in A$$

allora $A = \{n \in \mathbb{N} : n \geq n_0\}$.

Teorema

Per ogni naturale $n \geq 1$ $\mathcal{P}(n)$ è vera.

$$\mathcal{P}(n) := \qquad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Cenno di dimostrazione per induzione:

$$\mathcal{V} := \{n \in \mathbb{N} : \mathcal{P}(n) \quad \text{è vera}\}.$$

1. $\mathcal{P}(1)$ è vera. Quindi
$$1 \in \mathcal{V}$$
2. *Se $\mathcal{P}(n)$ è vera allora $\mathcal{P}(n+1)$ è vera.* Infatti
$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$
Quindi
$$n \in \mathcal{V} \implies n+1 \in \mathcal{V}.$$

Per il principio di induzione $\mathcal{V} = \{n \in \mathbb{N} : n \geq 1\}$

La disuguaglianza di Bernoulli[2]

$$(1+x)^n \geq 1+nx, \qquad \text{per ogni } x > -1 \text{ e per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

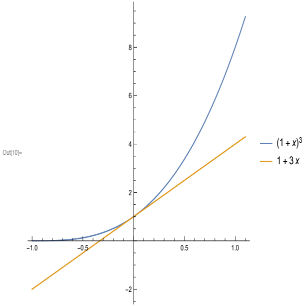

Figure: Grafici di $(1+x)^3$ e $1+3x$.

[2] Jacob Bernoulli (Basilea 1655 –Basilea 1705)

La formula del binomio

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ vale

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad \text{per } 1 \leq k < n$$

$$\binom{n}{0} := 1, \quad \binom{n}{n} := 1, \qquad \text{per "definizione".}$$

Osservazione

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

Cenno di prova:

- *La formula è vera per $n = 1$.*
  Infatti, per $n = 1$, la formula diventa

  $$a + b = a + b$$

  ed è quindi vera.

- *Formula vera per $n \geq 1 \implies$ formula vera per $n+1$.*

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n$$

$$= (a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k \qquad \text{per ipotesi induttiva}$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n+1-k}b^k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k+1}$$

$$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^{n+1-k}b^k + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k+1} + b^{n+1}$$

- *Formula vera per $n \geq 1 \implies$ formula vera per $n+1$.*

$$
\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\
&= (a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k \qquad \text{per ipotesi induttiva} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n+1-k}b^k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^{n+1-k}b^k + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k+1} + b^{n+1}
\end{aligned}
$$

- *Formula vera per $n \geq 1 \implies$ formula vera per $n+1$.*

$$
\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\
&= (a+b)\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \qquad \text{per ipotesi induttiva} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} + b^{n+1}
\end{aligned}
$$

- *Formula vera per* $n \geq 1 \implies$ *formula vera per* $n+1$.

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\ &= (a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k \qquad \text{per ipotesi induttiva} \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n+1-k}b^k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k+1}\end{aligned}$$

$$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^{n+1-k}b^k + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k+1} + b^{n+1}$$

$$(a+b)^{n+1}$$

$$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} + b^{n+1}$$

$$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k + b^{n+1}$$

$$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) a^{n+1-k} b^k + b^{n+1}$$

$$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k + b^{n+1}$$

$$(a+b)^{n+1}$$

$$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} + b^{n+1}$$

$$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k + b^{n+1}$$

$$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) a^{n+1-k} b^k + b^{n+1}$$

$$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k + b^{n+1}$$

$$
\begin{aligned}
&(a+b)^{n+1}\\
&\quad= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} + b^{n+1}\\
&\quad= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k + b^{n+1}\\
&\quad= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) a^{n+1-k} b^k + b^{n+1}\\
&\quad= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k + b^{n+1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} + b^{n+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k + b^{n+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) a^{n+1-k} b^k + b^{n+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k + b^{n+1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k + b^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k .
\end{aligned}
$$

$\square$

Vedi per esempio: Cap 1. 5.1, 7.

Definizione (elementare)

- Diciamo che un insieme non vuoto X ha n elementi (dove n è un naturale positivo) se esiste una funzione biunivoca ϕ
$$\phi : \{1, 2, \dots, n\} \to X.$$
Cioè "X si può mettere in corrispondenza biunivoca" con l'insieme $\{1, 2, \dots, n\}$. Si dice anche che X ha cardinalità n.
- Un insieme X si dice numerabile (equivalentemente: X è costituito da una infinità numerabile di elementi) se esiste una funzione biunivoca $\phi : \mathbb{N} \to X$.

Teorema

$\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ sono numerabili.

Cenno di prova: Una funzione biunivoca $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ è suggerita dal seguente disegno

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow\dots \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & -3\dots \end{array}$$

Una possibile funzione biunivoca $\phi : \mathbb{N} \to \{q \in \mathbb{Q} : q > 0\}$ è suggerita dal disegno

$$\begin{array}{ccccccccc}
1/1 & & 2/1 & & 3/1 & & 4/1 & \ldots \\
 & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \\
1/2 & & 2/2 & & 3/2 & & 4/2 & \ldots \\
 & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \\
1/3 & & 2/3 & & 3/3 & & 4/3 & \ldots \\
 & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \\
1/4 & & 2/4 & & 3/4 & & 4/4 & \ldots \\
 & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \\
1/5 & & & \vdots & & & \vdots &
\end{array}$$

e quindi

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\ldots \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow\ldots \\
0 & 1/1 & 2/1 & 1/2 & 3/1 & 2/2 & 1/3\ldots
\end{array}$$

oppure, depurato dalle ripetizioni,

$$\begin{array}{cccccccc}
0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7\ldots \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow\ldots \\
0 & 1 & 2 & 1/2 & 3 & 1/3 & 4 & 3/2\ldots
\end{array}$$

Infine con un procedimento analogo a quello usato per costruire la corrispondenza fra $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ si ottiene una corrispondenza biunivoca fra $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Q}$.

Teorema

L'unione di una famiglia numerabile di insiemi numerabili è numerabile.

Cenno di prova: $X_1, X_2, X_3 \ldots$ sono insiemi. Se ciascun insieme X_i è (finito o) numerabile allora

$$X := X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup \cdots = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$$

è numerabile.
Infatti

$$
\begin{array}{lccccccccc}
X_1 := \{ & x_{1,1} & & x_{1,2} & & x_{1,3} & & x_{1,4} & \dots \} \\
& & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \\
X_2 := \{ & x_{2,1} & & x_{2,2} & & x_{2,3} & & x_{2,4} & \dots \} \\
& & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \\
X_3 := \{ & x_{3,1} & & x_{3,2} & & x_{3,3} & & x_{3,4} & \dots \} \\
& & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \\
X_4 := \{ & x_{4,1} & & x_{4,2} & & x_{4,3} & & x_{4,4} & \dots \} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}
$$

$\square$