I numeri reali

Raul Paolo Serapioni

Analisi Matematica 1
Analisi Matematica A – Primo modulo
Corsi di Laurea in Fisica e Matematica
Università di Trento

settembre 2019

Vedi, per esempio: Cap 2. par 2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.6

Teorema: "$\sqrt{2}$ non è razionale"

Non esiste alcun numero $q \in \mathbb{Q}$ tale che $q^2 = 2$.

$$\downarrow$$

Esistono segmenti la cui lunghezza non è esprimibile con un numero razionale (e.g. la diagonale del quadrato di lato unitario).

Un *modello per i numeri reali*: i numeri reali come *allineamenti decimali illimitati*

$$\mathbb{R} := \{m, \alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots : \quad p \in \mathbb{Z},\ \alpha_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}\}.$$

Come in $\mathbb{Q}$, le espressioni decimali periodiche con periodo 9 vanno identificate con una espressione decimale limitata.

L'ordinamento $<$ in $\mathbb{R}$ si definisce nel modo usuale.

Se $m \in \mathbb{N}$ e $x := m, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots$ allora

$$m \leq x < m + 1$$

$$m, \alpha_1 \leq x < (m, \alpha_1) + \frac{1}{10}$$

$$m, \alpha_1 \alpha_2 \leq x < (m, \alpha_1 \alpha_2) + \frac{1}{100}$$

$$\vdots$$

$$m, \alpha_1 \dots \alpha_k \leq x < (m, \alpha_1 \dots \alpha_k) + \frac{1}{10^k}$$

$$\vdots$$

Le due successioni di numeri razionali identificano univocamente x.

Somma e prodotto

Somma e prodotto si definiscono per approssimazioni.

$$x := m, \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \dots \qquad y := n, \beta_1\beta_2\beta_3 \dots$$

Se supponiamo che $0 < m$ e $0 < n$ allora $x + y$ è identificato da

$$m + n \leq x + y < m + n + 2$$

$$(m, \alpha_1) + (n, \beta_1) \leq x + y < (m, \alpha_1) + (n, \beta_1) + \frac{2}{10}$$

$$\vdots$$

$$(m, \dots \alpha_k) + (n, \dots \beta_k) \leq x + y < (m, \dots \alpha_k) + (n, \dots \beta_k) + \frac{2}{10^k}$$

$$\vdots$$

Se m e n hanno segno qualsiasi si procede analogamente.

$$x := m, \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \dots \qquad y := n, \beta_1\beta_2\beta_3 \dots$$

Se $0 < m$ e $0 < n$ allora $x \cdot y$ è identificato da

$$\begin{aligned} m \cdot n \leq & x \cdot y < m \cdot n + C \\ (m, \alpha_1) \cdot (n, \beta_1) \leq & x \cdot y < (m, \alpha_1) \cdot (n, \beta_1) + \frac{C}{10} \\ & \vdots \\ (m, \dots \alpha_k) \cdot (n, \dots \beta_k) \leq & x \cdot y < (m, \dots \alpha_k) \cdot (n, \dots \beta_k) + \frac{C}{10^k} \\ & \vdots \end{aligned}$$

dove $C > 0$ dipende solo da x e y.

Se m e n hanno segno qualsiasi si procede analogamente.

$\mathbb{R}$ è un campo ordinato

La somma e il prodotto definiti nel modo suggerito sopra hanno tutte le (solite) proprietà.

Teorema

$\mathbb{R}$ è un campo ordinato

- La funzione $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ha le proprietà:

$$\begin{aligned} \text{per ogni } x, y, r \in \mathbb{R} \qquad & x + y = y + x \\ & (x + y) + r = x + (y + r) \\ & x + 0 = x \\ \text{esiste l'opposto di ogni } x \in \mathbb{R} \qquad & x + (-x) = 0 \end{aligned}$$

$\mathbb{R}$ è un campo ordinato

- La funzione $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ha le proprietà:

$$\begin{aligned} \text{per ogni } x, y, r \in \mathbb{R} \qquad & x \cdot y = y \cdot x \\ & (x \cdot y) \cdot r = x \cdot (y \cdot r) \\ \text{esiste l'unità} \qquad & x \cdot 1 = p \\ \text{esiste l'inverso di ogni } x \neq 0 \qquad & x \cdot x^{-1} = 1 \qquad \text{se } x \neq 0. \end{aligned}$$

- Proprietà distributiva: $(x + y) \cdot r = x \cdot r + y \cdot r$
- Relazioni con ordine

$$\begin{aligned} x < y \implies & x + r < y + r \\ x < y \text{ e } 0 < r \implies & x \cdot r < y \cdot r. \end{aligned}$$

- $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ sono "naturalmente" sottoinsiemi di $\mathbb{R}$.
- $\mathbb{Q}$ è *denso in* $\mathbb{R}$: fra due numeri qualsiasi esistono sempre infiniti numeri razionali.
- $\mathbb{R}$ ha la *proprietà di Archimede* (non esistono "infiniti" o "infinitesimi" in $\mathbb{R}$):

$$\forall x > 0, \forall y > 0, \exists n \in \mathbb{N} : xn > y.$$

L'insieme dei numeri reali può essere definito

- in modo assiomatico (vedi per esempio il primo capitolo di Enrico Giusti, Analisi 1, Boringhieri)
- i numeri reali possono essere "costruiti" a partire dal campo $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali con costruzioni come "i tagli di Dedekind" o "le classi separate e contigue".

$\sqrt{2}$ è un elemento di $\mathbb{R}$.

$\sqrt{2} = m, \alpha_1 \alpha_2 \dots$.
$m \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ sono calcolati iterativamente in modo che

$$m^2 \leq 2 < (m+1)^2$$

$$(m, \alpha_1)^2 \leq 2 < \left((m, \alpha_1) + \frac{1}{10}\right)^2$$

$$\vdots$$

$$(m, \alpha_1 \dots \alpha_k)^2 \leq 2 < \left((m, \alpha_1 \dots \alpha_k) + \frac{1}{10^k}\right)^2$$

$$\vdots$$

Si definiscono in modo analogo

- $\sqrt[n]{2}$, per $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$
- $2^{\frac{m}{n}} := \sqrt[n]{2^m}$, per $n > 0$
- 2^x, per $x \in \mathbb{R}$
- m^x, per $m \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$
- $\left(\frac{m}{n}\right)^x := \frac{m^x}{n^x}$ per $n > 0$
- y^x per $y > 0$ e $x \in \mathbb{R}$.

Definizione

Sia $E \subset \mathbb{R}$:
se esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che $\forall x \in E : x \leq \alpha$ allora α si dice maggiorante di E; analogamente per minorante;
se esiste un $m \in E \subset \mathbb{R}$ tale che $\forall x \in E : x \leq m$ allora m si dice massimo di E; analogamente per minimo.

Definizione

E si dice limitato superiormente se esiste almeno un maggiorante per E; analogamente si definisce limitato inferiormente; E si dice limitato se è limitato superiormente e limitato inferiormente;

Definizione

- Se E è un sottoinsieme limitato e non vuoto di $\mathbb{R}$ definiamo estremo superiore e estremo inferiore di E come

$$\sup E := \text{il minimo maggiorante di } E$$
$$\inf E := \text{il massimo minorante di } E.$$

- se E non è limitato superiormente definiamo

$$\sup E := +\infty;$$

- se E non è limitato inferiormente definiamo

$$\inf E := -\infty.$$

Teorema: $\mathbb{R}$ è *completo*

Se A è un sottoinsieme limitato e non vuoto di $\mathbb{R}$ allora esistono $\sup A$ e $\inf A$.

Teorema

$\mathbb{R}$ è un campo ordinato e completo.

Caratterizzazione di sup E oppure inf E.

$\alpha = \sup E$ se e solo se

$$(i) \qquad x \le \alpha, \qquad \forall x \in E$$

$$(ii) \qquad \forall \varepsilon > 0 \text{ esiste un } x \in E \text{ tale che } \alpha - \varepsilon < x;$$

analogamente per $\inf E$.

Osservazione: $\mathbb{Q}$ non è completo.

$E := \{q \in \mathbb{Q} : q^2 < 2\}$ è un insieme limitato.
Non esistono (in $\mathbb{Q}$) né il minimo dei maggioranti di E né il massimo dei minoranti di E.

Teorema

$\mathbb{R}$ non è numerabile.

Cenno di prova: Sia $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, allora ϕ non è surjettiva.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 & \mapsto & \phi(0) := & m_0, & \alpha_{0,1} & \alpha_{0,2} & \alpha_{0,3} & \cdots \\
1 & \mapsto & \phi(1) := & m_1, & \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} & \cdots \\
2 & \mapsto & \phi(2) := & m_2, & \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} & \cdots \\
3 & \mapsto & \phi(3) := & m_3, & \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} & \cdots \\
4 & \mapsto & \phi(4) := & m_4, & \alpha_{4,1} & \alpha_{4,2} & \alpha_{4,3} & \cdots \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & & & \ddots
\end{array}
$$

Teorema

$\mathbb{R}$ non è numerabile.

Cenno di prova: Sia $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, allora ϕ non è surjettiva.

$$
\begin{array}{ccclllll}
0 & \mapsto & \phi(0) := & m_0, & \alpha_{0,1} & \alpha_{0,2} & \alpha_{0,3} & \ldots \\
1 & \mapsto & \phi(1) := & m_1, & \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} & \ldots \\
2 & \mapsto & \phi(2) := & m_2, & \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} & \ldots \\
3 & \mapsto & \phi(3) := & m_3, & \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} & \ldots \\
4 & \mapsto & \phi(4) := & m_4, & \alpha_{4,1} & \alpha_{4,2} & \alpha_{4,3} & \ldots \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & & & \ddots
\end{array}
$$

$y := n, \beta_1\beta_2\beta_3 \ldots \notin \phi(\mathbb{N}))$ se $n \neq m_0$ e $\beta_1 \neq \alpha_{1,1}$ e $\beta_2 \neq \alpha_{2,2} \ldots$