Successioni e Limiti di Successioni

Raul Paolo Serapioni

Analisi Matematica 1
Analisi Matematica A – Primo modulo
Corsi di Laurea in Fisica e Matematica
Università di Trento

ottobre 2019

Limiti di funzioni: Cap 4: par 1.1, 1.2, 1.3, 2.1, 2.2

Esempi che conducono naturalmente alla nozione di limite:

1. trovare la retta tangente ad una curva in un suo punto;
2. definire la velocità istantanea di punto materiale in moto;
3. calcolare l'area di una regione con bordo curvilineo;
4. calcolare la somma di infiniti addendi;

Limiti di successioni: Cap 4 par 3.1.

Definizioni

- Una funzione $(s_n)_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ si dice successione (a valori reali).
- Una successione è monotona crescente (decrescente) se, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $s_n \leq s_{n+1}$ (alternativamente $s_n \geq s_{n+1}$).
- Una successione è limitata se

$$-\infty < \inf_{n\in\mathbb{N}} s_n \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} s_n < +\infty$$

cioè se è limitata la sua immagine

Definizione

Se $(s_n)_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ è una successione diciamo che

- $$\lim_{n\to+\infty} s_n = \ell \in \mathbb{R}$$
  se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $|s_n - \ell| < \varepsilon$ per $n \geq \bar{n}$;
- $$\lim_{n\to+\infty} s_n = +\infty$$
  se per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $s_n > \alpha$ per $n \geq \bar{n}$;
- $$\lim_{n\to+\infty} s_n = -\infty$$
  se per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $s_n < \alpha$ per $n \geq \bar{n}$.

Definizione

Se $(s_n)_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ è una successione diciamo che

- $(s_n)_n$ si dice convergente se
$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \ell \in \mathbb{R};$$
- $(s_n)_n$ si dice divergente (divergente a $\pm\infty$) se
$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \pm\infty$$
- $(s_n)_n$ si dice irregolare in tutti gli altri casi.

Example

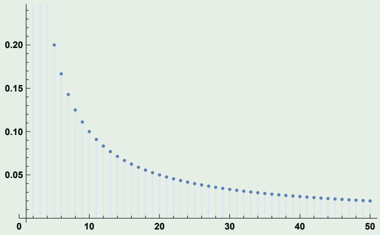


Figure: $s_n := \frac{1}{n}$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$

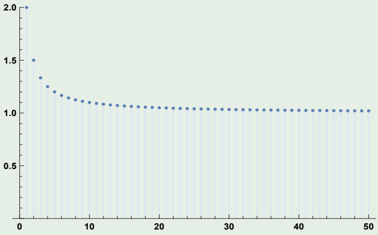


Figure: $s_n := \frac{n+1}{n}$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+1}{n} = 1$

Example

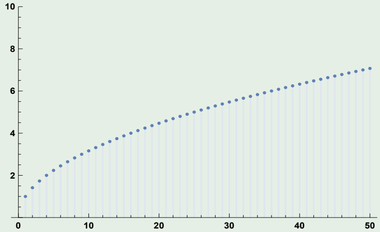


Figure: $s_n := \sqrt{n}$ $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$

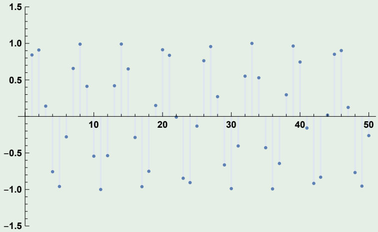
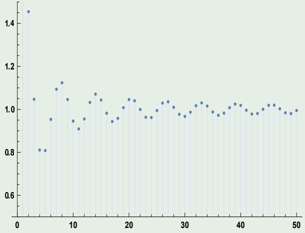
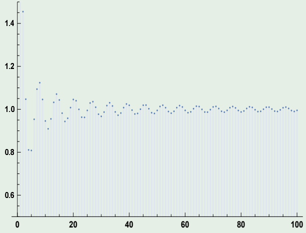
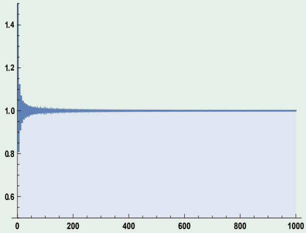


Figure: $s_n := \sin n$ $\lim_{n\to+\infty} \sin n$ non esiste

Example







$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+\sin n}{n} = 1$$

Notazione comune

Una proprietà $\mathcal{P}(n)$ si dice

$$\text{vera definitivamente (per } n \to +\infty)$$

se esiste $\bar{n}$ tale che $\mathcal{P}(n)$ è vera per ogni $n \geq \bar{n}$.

Osservazione

Una proprietà $\mathcal{P}(n)$ è vera definitivamente se e solo se $\mathcal{P}(n)$ è vera tranne che per (al più) un insieme finito di indici n.

Definizione alternativa

- Se per ogni $\varepsilon > 0$, $|s_n - \ell| < \varepsilon$ definitivamente per $n \to +\infty$ diciamo che
$$\lim_{n \to +\infty} s_n = \ell$$
- se per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, $s_n > \alpha$ definitivamente per $n \to +\infty$ diciamo che
$$\lim_{n \to +\infty} s_n = +\infty$$

Teorema di unicità del limite

Se $\lim_{n\to+\infty} s_n = \ell_1$ e $\lim_{n\to+\infty} s_n = \ell_2$ allora

$$\ell_1 = \ell_2.$$

Cenno di prova: Se $\ell_1 \neq \ell_2$ si può scegliere ε positivo e $\varepsilon < |\ell_1 - \ell_2|/2$. Con questa scelta di ε le disuguaglianze

$$\ell_1 - \varepsilon \leq s_n \leq \ell_1 + \varepsilon, \qquad \ell_2 - \varepsilon \leq s_n \leq \ell_2 + \varepsilon$$

sono incompatibili. Non è possibile che valgano entrambe definitivamente per $n \to +\infty$. $\square$

Teorema di permanenza del segno

- Se $\lim_{n\to+\infty} s_n = \ell > 0$ allora $s_n > 0$ definitivamente per $n \to +\infty$;
- se $\lim_{n\to+\infty} s_n = \ell < 0$ allora $s_n < 0$ definitivamente per $n \to +\infty$.

Cenno di prova: Se $\ell > 0$ basta scegliere $\varepsilon > 0$ e $\varepsilon < \ell/2$. L'esistenza del limite implica che definitivamente vale

$$0 < \ell/2 < \ell - \varepsilon < s_n (< \ell + \varepsilon)$$

e quindi s_n è definitivamente positiva.
Se $\ell < 0$ si sceglie $\varepsilon < |\ell|/2$ e il ragionamento è analogo. $\square$