Limiti di successioni
Algebra dei limiti

Raul Paolo Serapioni

Analisi Matematica A – Secondo modulo
Corso di Laurea in matematica
Università di Trento

ottobre 2019

Teorema del confronto

Se $a_n \leq s_n \leq b_n$, definitivamente per $n \to +\infty$, e se

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n$$

allora

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} a_n.$$

Variante del teorema confronto

Se $a_n \leq s_n$, definitivamente per $n \to +\infty$, e se

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$$

allora

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = +\infty.$$

Example

Se $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$ e $s_n := \sqrt[n]{\beta}$.

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\beta} = 1.$$

Cenno di prova: Se $\beta > 1$ allora $s_n > 1$. Quindi $s_n = 1 + h_n$ con $h_n > 0$.

Per disuguaglianza di Bernoulli $\beta = (1 + h_n)^n \geq 1 + nh_n$, quindi

$$0 < h_n \leq (\beta - 1)/n \quad \Longrightarrow \quad h_n \to 0.$$

Se $0 < \beta < 1$, allora $\sqrt[n]{\beta} = \frac{1}{1+k_n}$ con $k_n > 0$. Segue che

$$0 < k_n \leq \frac{1}{n}(\frac{1}{\beta} - 1) \quad \Longrightarrow \quad k_n \to 0.$$

$\square$

Example

Se $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$ e $s_n := \sqrt[n]{\beta}$.

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\beta} = 1.$$

Cenno di prova: Se $\beta > 1$ allora $s_n > 1$. Quindi $s_n = 1 + h_n$ con $h_n > 0$.
Per disuguaglianza di Bernoulli $\beta = (1 + h_n)^n \geq 1 + nh_n$, quindi

$$0 < h_n \leq (\beta - 1)/n \quad \Longrightarrow \quad h_n \to 0.$$

Se $0 < \beta < 1$, allora $\sqrt[n]{\beta} = \frac{1}{1+k_n}$ con $k_n > 0$. Segue che

$$0 < k_n \leq \frac{1}{n}(\frac{1}{\beta} - 1) \quad \Longrightarrow \quad k_n \to 0.$$

Example

Se $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$ e $s_n := \sqrt[n]{\beta}$.

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\beta} = 1.$$

Cenno di prova: Se $\beta > 1$ allora $s_n > 1$. Quindi $s_n = 1 + h_n$ con $h_n > 0$.
Per disuguaglianza di Bernoulli $\beta = (1 + h_n)^n \geq 1 + nh_n$, quindi

$$0 < h_n \leq (\beta - 1)/n \quad \Longrightarrow \quad h_n \to 0.$$

Se $0 < \beta < 1$, allora $\sqrt[n]{\beta} = \frac{1}{1+k_n}$ con $k_n > 0$. Segue che

$$0 < k_n \leq \frac{1}{n}(\frac{1}{\beta} - 1) \quad \Longrightarrow \quad k_n \to 0.$$

$\square$

Example (La progressione geometrica)

Se $\alpha \in \mathbb{R}$ e $s_n := \alpha^n$.

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha^n = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad -1 < \alpha < 1 \\ 1 & \text{se} \quad \alpha = 1 \\ +\infty & \text{se} \quad \alpha > 1 \\ \text{non esiste} & \text{se} \quad \alpha \leq -1. \end{cases}$$

Example (La serie geometrica)

Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e

$$s_n := 1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^n = \sum_{k=0}^{n} \alpha^k$$

Osserviamo che

$$1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^n = \frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha}$$

quindi se $|\alpha| < 1$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha^k := \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^n\right) = \frac{1}{1 - \alpha}.$$

Example (Le serie numeriche)

$a_1, a_2, a_3, \ldots$ è una successione di numeri reali (o complessi).

La successione delle somme parziali degli a_k è

$$s_n := a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Definiamo

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k := \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Teorema di esistenza del limite per successioni monotone

Sia $(s_n)_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ monotona crescente.

- Se $(s_n)_n$ è limitata superiormente allora
$$\lim_{n \to +\infty} s_n = \sup_n s_n;$$
- se $(s_n)_n$ è superiormente illimitata allora
$$\lim_{n \to +\infty} s_n = +\infty.$$

Analogamente se $(s_n)_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ monotona decrescente.

Cenno di prova:

- Se esiste $\bar{n}$ tale che $\sup_k s_k = s_{\bar{n}}$ allora la successione è definitivamente costante e uguale a $s_{\bar{n}}$.

- Se $s_n < \sup_k s_k$, ricordando la caratterizzazione dell'estremo superiore:
  per ogni $\varepsilon > 0$ esiste (almeno) un elemento $s_{\bar{n}}$ tale che

$$\sup_n s_n - \varepsilon < s_{\bar{n}} \leq \sup_n s_n.$$

Per la monotonia di $(s_n)_n$

$$\sup_n s_n - \varepsilon < s_m \leq \sup_n s_n \qquad \text{per ogni } m > \bar{n}.$$

Per l'arbitrarietà di ε questo implica $\lim_{n\to+\infty} s_n = \sup_n s_n$.

Example

Se $\alpha > 0$ e se $b > 1$

$$\lim_{n \to +\infty} n^{\alpha} = +\infty$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{b^n} = 0$$

$$\lim_{n \to +\infty} \log n = +\infty$$

Teorema: algebra dei limiti

Se $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ sono successioni convergenti e se

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \alpha, \qquad \lim_{n\to+\infty} b_n = \beta$$

allora

$$\lim_{n\to+\infty}(a_n + b_n) = \alpha + \beta;$$

$$\lim_{n\to+\infty}(a_n - b_n) = \alpha - \beta$$

$$\lim_{n\to+\infty}(a_n b_n) = \alpha\beta$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\alpha}{\beta}, \qquad \text{se } \beta \neq 0.$$

Teorema: algebra dei limiti

Se $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ sono successioni convergenti e se

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \alpha > 0 \qquad \lim_{n\to+\infty} b_n = \beta$$

allora

$$\lim_{n\to+\infty} a_n^{b_n} = \lim_{n\to+\infty} e^{b_n \log a_n} = \alpha^{\beta}.$$

Algebra dei limiti: qualche generalizzazione

- Se $\lim_{n\to+\infty} a_n = \alpha$ e $\lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty$ allora

$$\lim_{n\to+\infty} (a_n + b_n) = +\infty.$$

- Se $\lim_{n\to+\infty} a_n = \alpha > 0$ e $\lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty$ allora

$$\lim_{n\to+\infty} (a_n b_n) = +\infty.$$

Algebra dei limiti: qualche generalizzazione

- Se $(a_n)_n$ è limitata e $\lim_{n \to +\infty} b_n = +\infty$ allora
$$\lim_{n \to +\infty} (a_n + b_n) = +\infty.$$
- Se $(a_n)_n$ è limitata e $\lim_{n \to +\infty} b_n = +\infty$ allora
$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0.$$

Algebra dei limiti: qualche generalizzazione

- Se $1 < \alpha \leq (a_n)_n$ e $\lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty$ allora
$$\lim_{n\to+\infty} a_n^{b_n} = +\infty.$$
- Se $0 \leq (a_n)_n \leq \alpha < 1$ e $\lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty$ allora
$$\lim_{n\to+\infty} a_n^{b_n} = 0.$$

Sono casi critici nell'algebra dei limiti

- $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = -\infty$, sono informazioni non sufficienti per conoscere esistenza e/o valore di
$$\lim_{n\to+\infty}(a_n + b_n).$$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \pm\infty$, sono informazioni non sufficienti per conoscere esistenza e/o valore di
$$\lim_{n\to+\infty}(a_n b_n).$$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \pm\infty$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \pm\infty$ (oppure $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$), sono informazioni non sufficienti per conoscere esistenza e/o valore di
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}.$$