Casi critici nell'algebra dei limiti
Il numero *e*
Serie numeriche

Raul Paolo Serapioni

Analisi Matematica 1
Analisi Matematica A – Primo modulo
Corsi di Laurea in Fisica e Matematica
Università di Trento

ottobre 2019

Sono casi critici nell'algebra dei limiti

- $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ e $\lim_{n\to+\infty} b_n = -\infty$, sono informazioni non sufficienti per conoscere esistenza e/o valore di
$$\lim_{n\to+\infty} (a_n + b_n).$$
- $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ e $\lim_{n\to+\infty} b_n = \pm\infty$, sono informazioni non sufficienti per conoscere esistenza e/o valore di
$$\lim_{n\to+\infty} (a_n b_n).$$
- $\lim_{n\to+\infty} a_n = \pm\infty$ e $\lim_{n\to+\infty} b_n = \pm\infty$ (oppure $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ e $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$), sono informazioni non sufficienti per conoscere esistenza e/o valore di
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n}.$$

Example

Se $\alpha_0 \neq 0$, $\beta_0 \neq 0$ e $h, k \in \mathbb{N}$ allora

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\alpha_0 n^k + \alpha_1 n^{k-1} + \cdots + \alpha_k}{\beta_0 n^h + \beta_1 n^{h-1} + \cdots + \beta_h} = \begin{cases} \pm\infty & \text{se } k > h \\ \dfrac{\alpha_0}{\beta_0} & \text{se } k = h \\ 0 & \text{se } k < h \end{cases}$$

Teorema

Supponiamo $a > 1$ e $p > 0$. Allora

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n^p} = +\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^p}{\log n} = +\infty$$

Ulteriori casi critici nell'algebra dei limiti:

- $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$,
- $a_n > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$,
- $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \pm\infty$,

sono informazioni non sufficienti per conoscere esistenza e/o valore di

$$\lim_{n\to+\infty} (a_n^{b_n}).$$

Example

- $\sqrt[n]{n} = e^{\frac{\log n}{n}} \to e^0 = 1$ per $n \to +\infty$.
- $\sqrt[n]{2^n} = 2 \to 2$ per $n \to +\infty$.
- $\sqrt[n]{2^{n^2}} = 2^n \to +\infty$ per $n \to +\infty$.

Teorema

La successione

$$n \mapsto \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

è convergente e si definisce

$$e := \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Se definiamo

$$s_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \qquad \sigma_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

$$\begin{aligned} s_1 &= 2 \\ s_2 &= 2,25 \\ s_3 &= 2,37037\ldots \\ &\vdots \\ s_9 &= 2,58117\ldots \\ s_{10} &= 2,59374\ldots \\ &\vdots \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \sigma_1 &= 4 \\ \sigma_2 &= 3,375 \\ \sigma_3 &= 3,16049\ldots \\ &\vdots \\ \sigma_9 &= 2,86797\ldots \\ \sigma_{10} &= 2,85312\ldots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Cenno di Prova:

- $s_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ è monotona crescente.
- $s_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \sigma_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$.
- $\sigma_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ è monotona decrescente.
- Quindi s_n è monotona crescente e superiormente limitata, infatti

$$s_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \sigma_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \le \sigma_1 = 4$$

e quindi $(s_n)_n$ è convergente.

Corollario

Per ogni $a \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a$$

Corollario

Se $a_n \to +\infty$

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e.$$

Teorema (Eulero 1748)

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{0}^{+\infty}\frac{1}{k!}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left(1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)$$

Se definiamo

$$s_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \qquad t_n := 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{n!}.$$

$$\begin{array}{llcll}
s_1 = & 2 & \qquad & t_1 = & 2 \\
s_2 = & 2,25 & & t_2 = & 2,5 \\
s_3 = & 2,37037\ldots & & t_3 = & 2,6666\ldots \\
\vdots & & & \vdots & \\
s_{10} = & 2,59374\ldots & & t_{10} = & 2,718281801\ldots \\
\vdots & & & \vdots & \\
s_{100} = & 2,70481\ldots & & t_{100} = & \text{oltre 15 decimali esatti} \\
\vdots & & & \vdots & \\
s_{1000} = & 2,71692\ldots & & &
\end{array}$$

Serie numeriche: si tratta di dare un senso opportuno alla nozione di somma di infiniti addendi reali o complessi.

Vedi: Cap 8: par 2.1, 2.2, 2.3
2.1 Definizione di serie e prime proprietà

Si usa la seguente terminologia e simbologia.
Una serie numerica

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

è la seguente coppia di successioni:

- una successione $a_0, a_1, a_2, \ldots$ di numeri reali (o complessi) detti termini o addendi della serie
- e la associata successione $s_0, s_1, s_2, \ldots$ delle somme parziali della serie

$$s_n := a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k.$$

Definizione

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k := \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k,$$

se il limite esiste finito o $\pm\infty$.
Tale limite si dice somma della serie.

- Se il limite esiste finito la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ è convergente.
- Se il limite è $\pm\infty$ la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ è divergente.
- La serie è irregolare negli altri casi.

Osservazione

Una serie a termini non negativi è convergente oppure è divergente a $+\infty$, infatti la successione delle somme parziali è monotona.

Osservazione

Il carattere di una serie, cioè il suo essere convergente, divergente o irregolare, non è modificato se sono modificati un numero finito di addendi della serie.

Osservazione

Se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è convergente allora $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n = 0$.

Example (La serie geometrica)

Si dice serie geometrica una serie del tipo

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha^k = 1 + \alpha + \alpha^2 + \dots$$

dove $\alpha \in R$ oppure $\alpha \in C$ si chiama *ragione della serie*.

Esempio 2.1 pag 429

Poichè

$$s_N := \sum_{k=0}^{N} \alpha^k = 1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^N = \frac{1-\alpha^{N+1}}{1-\alpha}.$$

Quindi, se $\alpha \in R$,

$$s_N = \frac{1-\alpha^{N+1}}{1-\alpha} \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} \text{divergente a } +\infty & \text{se } \alpha \geq 1 \\ \text{convergente a } \dfrac{1}{1-\alpha} & \text{se } -1 < \alpha < 1 \\ \text{irregolare} & \text{se } \alpha \leq -1. \end{cases}$$

Example (La serie 'telescopica' di Mengoli)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

è convergente e

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

Esempio 2.2 pag 430

Infatti è possibile scrivere in forma chiusa le somme parziali:

$$
\begin{aligned}
s_N &:= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(N-1) \cdot N} \\
&= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{N-1} - \frac{1}{N}\right) \\
&= 1 - \frac{1}{N} \quad \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} 1.
\end{aligned}
$$

Example (La serie armonica)

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{k} + \ldots$$

è una serie divergente.

Vedi: Esempio 2.3 pag 431

Traccia di prova (Nicole Oresme circa 1350):

$$s_4 = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{> \frac{1}{2}} > 2$$

$$s_8 = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{> \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8}}_{> \frac{1}{2}} > \frac{5}{2}$$

$$s_{16} = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{> \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8}}_{> \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}}_{> \frac{1}{2}} > 3$$

$$s_{2^N} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^N} > 1 + \frac{N}{2} \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

quindi l'intera successione s_N che è monotona crescente ha limite $+\infty$.

$\square$