Serie numeriche

Raul Paolo Serapioni

Analisi Matematica 1
Analisi Matematica A – Primo modulo
Corsi di Laurea in Fisica e Matematica
Università di Trento

ottobre 2019

MEMO

Si usa la seguente terminologia e simbologia.
Una serie numerica

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

è la seguente coppia di successioni:

- una successione $a_0, a_1, a_2, \ldots$ di numeri reali (o complessi) detti termini o addendi della serie
- e la associata successione $s_0, s_1, s_2, \ldots$ delle somme parziali della serie

$$s_n := a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k .$$

MEMO

Definizione

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k := \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k,$$

se il limite esiste finito o $\pm\infty$.
Tale limite si dice somma della serie.

- Se il limite esiste finito la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ è convergente.
- Se il limite è $\pm\infty$ la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ è divergente.
- La serie è irregolare negli altri casi.

MEMO

Example (La serie ‘telescopica’ di Mengoli)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

è convergente e

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

MEMO

Example (La serie armonica)

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{k} + \dots$$

è una serie divergente. Si scrive spesso

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = +\infty.$$

Example (La serie armonica generalizzata)

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{k^2} + \ldots$$

è una serie convergente.

Teorema (Eulero 1748)

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Traccia di prova della convergenza:
Per ogni $k \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{(k+1)^2} < \frac{1}{k(k+1)}$$

ne segue che

$$s_n := 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} < 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)} < 2.$$

Quindi $(s_n)_n$ è monotona crescente e limitata dall'alto e quindi convergente.

Example (Serie a segni alternati)

Sono della forma

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k a_k$$

dove $a_k \geq 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.

Per queste serie vale il seguente criterio solo sufficiente di convergenza.

Criterio di convergenza "di Leibniz"

Supponiamo che

1. $a_k \geq 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$,
2. $a_{k+1} \leq a_k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$,
3. $\lim_{k \to +\infty} a_k = 0$

allora

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k \quad \text{è convergente.}$$

Vedi: Teorema 2.12 pag. 440.

Traccia di prova della convergenza:

- Le ipotesi (1) e (2) garantiscono che

$$s_1 \leq s_3 \leq s_5 \leq \cdots \leq s_6 \leq s_4 \leq s_2 \leq s_0$$

- L'ipotesi (3) implica che

$$\lim_{n\to+\infty} |s_{n+1} - s_n| = 0.$$

- Esistono e sono uguali

$$\lim_{n\to+\infty} s_{2n+1} = \lim_{n\to+\infty} s_{2n}$$

e conseguentemente si ottiene che esiste finito

$$S := \lim_{n\to+\infty} s_n.$$

Nelle stesse ipotesi possiamo fare la seguente ‘stima dell’errore’.

Se

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$$

allora

$$\left| \sum_{k=0}^{N} (-1)^k a_k - S \right| < a_{N+1}.$$

Teorema: condizione necessaria di convergenza di una serie

Se $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è convergente allora $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

(Vedi: Corollario 2.2, pag 431.)

Osservazione

La condizione $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ è solo necessaria per la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Traccia di prova: Se $S := \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n}(\varepsilon) > 0$ tale che

$$|S - \sum_{k=1}^{n} a_k| < \varepsilon \qquad \text{per } n > \bar{n}(\varepsilon).$$

Quindi, per $n > \bar{n}(\varepsilon)$,

$$|a_{n+1}| = \left|\sum_{k=1}^{n+1} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leq \left|\sum_{k=1}^{n+1} a_k - S\right| + \left|S - \sum_{k=1}^{n} a_k\right| < 2\varepsilon.$$

$\square$

La seguente condizione è necessaria e sufficiente.

Teorema: Condizione di convergenza di Cauchy

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \quad \text{è convergente}$$

se e solo se

per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N(\varepsilon) > 0$ tale che per ogni m, n, $N \leq m < n$, valga

$$\left| \sum_{k=m}^{n} a_k \right| = |a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n| < \varepsilon.$$

Vedi: Teorema 2.1, pag 430.

Teorema: criterio del confronto

Se $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ e $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ sono serie a termini non negativi.
Se

$$0 \leq a_k \leq b_k, \qquad \text{per } k \in \mathbb{N}$$

allora

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ divergente } \Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ divergente}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ convergente } \Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ convergente}$$

Vedi: Teorema 2.4, pag 432 e Corollario 2.5, pag 434.

Le ipotesi del teorema precedente si possono indebolire:

Teorema: criterio del confronto asintotico (variante 1)

Se esistono costanti $C > 0$ e $\bar{N} > 0$ tali che

$$0 \leq Ca_k \leq b_k$$

per $k = \bar{N}, \bar{N}+1, \bar{N}+2, \dots$ allora

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ divergente } \implies \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ divergente}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ convergente } \implies \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ convergente}$$

La forma più generale del teorema precedente:

Teorema: criterio del confronto asintotico (variante 2)

Se esistono tre costanti $0 < C_1 < C_2$ e $\bar{N} > 0$ tali che

$$0 \leq C_1 a_k \leq b_k \leq C_2 a_k$$

per $k = \bar{N}, \bar{N}+1, \bar{N}+2, \ldots$ allora

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k \quad \text{hanno lo stesso carattere.}$$

Una variante spesso operativamente più semplice:

Teorema: criterio del confronto asintotico (variante 3)

Se $0 < a_k$ e $0 < b_k$ per $k > \bar{N}$ e se

$$0 < \lim_{k \to +\infty} \frac{a_k}{b_k} < +\infty$$

allora

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k \quad \text{hanno lo stesso carattere.}$$

Sono corollari dei Teoremi del Confronto:

Teorema: criterio della radice

Se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è una serie a termini non negativi (cioè $a_n \geq 0$) e se

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$$

allora $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è convergente.

Teorema: criterio del rapporto

Se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è una serie a termini positivi (cioè $a_n > 0$) e se

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$$

allora $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è convergente.

Vedi: Teorema 2.6 pag 434 e Teorema 2.8 pag 435.

Sono pochi i teoremi generali ed elementari sulla convergenza di serie numeriche con termini di segno qualsiasi.
Il seguente teorema fornisce una condizione sufficiente ma non necessaria di convergenza.

Teorema

Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è una serie a termini reali (o complessi), allora

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ è convergente} \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ è convergente.}$$

Vedi: Teorema 2.11 pag 438

Definizione

Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, con termini reali o complessi, si dice

assolutamente convergente

se è convergente la serie dei valori assoluti $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Vedi: Definizione 2.2 pag. 439

Example

La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^\alpha}$$

- è assolutamente convergente per $\alpha > 1$,
- è convergente ma non assolutamente convergente per $0 < \alpha \leq 1$.

Definizione

Una serie $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ è un riordinamento della serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ se esiste una applicazione biunivoca $j : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che

$$a_k = b_{j(k)}.$$

Example

$a_1 + a_3 + a_2 + a_5 + a_7 + a_4 + \dots$ è un riordinamento di $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$

Vedi: Definizione 2.3 a pag 445

Teorema:

Se una serie è assolutamente convergente allora ogni suo riordinamento è convergente ed ha la stessa somma.

Teorema di Riemann - Dini

Se una serie è convergente ma non assolutamente convergente, allora scelto un qualsiasi $S \in \mathbb{R}$ esiste un riordinamento della serie data con somma S.

Vedi: Teoremi 2.17 e 2.18 a pag 446