Limiti
Algebra dei limiti

Raul Paolo Serapioni

Analisi Matematica 1
Analisi Matematica A – Primo modulo
Corsi di Laurea in Fisica e Matematica
Università di Trento

ottobre 2019

Limiti e algebra dei limiti *Vedi: Cap 4. par 2.3, 2.4, 2.5*.

Definizione

- x_0 si dice punto di accumulazione di $E \subset \mathbb{R}$ se

$$\text{per ogni } \varepsilon > 0 \text{ esiste } x \in E \text{ t. c. } 0 < |x - x_0| < \varepsilon.$$

- Se E è illimitato superiormente (inferiormente) si dice che $+\infty$ ($-\infty$) è di accumulazione per E.

Osservazione

Se E ha (almeno) un punto di accumulazione allora E è un insieme infinito.

Definizione

Siano $E \subset \mathbb{R}$, x_0 di accumulazione per E e $f : E \to \mathbb{R}$.

- Diciamo che
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$$
se: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tale che
$$\text{se } x \in E \text{ e } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ allora } |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$
- Diciamo che
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \quad (-\infty)$$
se: per ogni $k \in \mathbb{R}$ esiste $\delta = \delta(k) > 0$ tale che
$$\text{se } x \in E \text{ e } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ allora } f(x) > k \quad (f(x) < k).$$

Osservazione

La frase:

"esiste $\delta > 0$: $x \in E$ e $0 < |x - x_0| < \delta$ allora $|f(x) - \ell| < \varepsilon$"

viene abbreviata con

"$|f(x) - \ell| < \varepsilon$ definitivamente per $x \to x_0$"

Quindi la definizione precedente si esprime equivalentemente come:

Definizione (formulazione alternativa)

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$$

se: per ogni $\varepsilon > 0$, $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ definitivamente per $x \to x_0$.

Definizione

Siano $E \subset \mathbb{R}$, $+\infty$ di accumulazione per E e $f : E \to \mathbb{R}$.

- Diciamo che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ se:
  per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tale che
  $$\text{se } x \in E \text{ e } x > \delta \text{ allora } |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$
- Diciamo che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad (-\infty)$
  se: per ogni $k \in \mathbb{R}$ esiste $\delta = \delta(k) > 0$ tale che
  $$\text{se } x \in E \text{ e } x > \delta \text{ allora } f(x) > k \quad (f(x) < k).$$

Analogamente si definiscono

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

Limiti "da sinistra" o "da destra":

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \ell, \qquad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty, \ldots \qquad \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \ell, \ldots$$

Limiti "per eccesso" o "per difetto":

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell^+, \qquad \lim_{x\to x_0} f(x) = \ell^-, \ldots \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell^+, \ldots$$

Osservazione

Nella definizione di
$$\lim_{x \to x_0} f(x)$$
non si richiede che f sia definita nel punto di accumulazione x_0.

L'eventuale valore di f nel punto di accumulazione x_0 non ha nessun ruolo nell'esistenza o nel valore di $\lim_{x \to x_0} f(x)$.

Relazione fra limiti di funzioni e limiti di successioni.

Teorema (Teorema ponte)

Sia $f : E \to \mathbb{R}$, x_0 punto di accumulazione di E,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : \; 0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - \ell| < \delta$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall (x_n)_n \subset I \text{ tale che } \lim_{n \to +\infty} x_n = x_0, \; x_n \neq x_0 \text{ vale } \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \ell$$

e analogamente per $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) \ldots$

Vedi: Teorema 3.6, pag.166.

Esempi di non esistenza del limite.

- Non esistono i limiti per $x \to 0$ delle funzioni

$$f_1(x) := \frac{x}{|x|}, \quad f_2(x) := \frac{1}{x}, \quad f_3(x) := \sin(1/x).$$

- Non esistono i limiti per $x \to +\infty$ delle funzioni

$$f_1(x) := \sin x, \quad f_2(x) := x \cos x.$$

Teorema (di unicità del limite)

Se $f : E \to \mathbb{R}$, se x_0 (oppure $+\infty$ o $-\infty$) è di accumulazione per E allora

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell_1, \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell_2 \implies \ell_1 = \ell_2.$$

Vedi Teorema 2.1 pag. 144

Teorema (di permanenza del segno)

Sia $f : E \to \mathbb{R}$ e x_0 di accumulazione per E. Se $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) > 0$ allora esiste $\varepsilon > 0$ tale che $f(x) > 0$ per ogni $x \in E$ e $0 < |x - x_0| < \varepsilon$.

Vedi: Teorema 2.3, pag. 146

Teorema (del confronto)

Siano $f, g, h : E \to \mathbb{R}$ e x_0 (oppure $+\infty$ o $-\infty$) di accumulazione per E. Se

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \qquad \text{per } x \in E,$$
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x)$$

allora $\lim_{x \to x_0} g(x)$ esiste e

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) (= \lim_{x \to x_0} h(x)).$$

Vedi: Teorema 2.4, pag. 147

Teorema (di esistenza del limite per funzioni monotone)

Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ e f monotona crescente in (a, b). Allora esistono $\lim_{x\to b^-} f(x)$, $\lim_{x\to a^+} f(x)$ e

$$\lim_{x\to b^-} f(x) = \sup_{x\in(a,b)} f(x);$$

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \inf_{x\in(a,b)} f(x).$$

Analogamente se $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ o $f : (-\infty, b) \to \mathbb{R}$.
Analogamente se f è monotona decrescente.

Vedi: Teorema 2.10, pag. 154

Traccia di prova:

1. Se $\sup_{x\in(a,b)} f(x) = \max_{x\in(a,b)} f(x) =: \ell$ allora esiste $\bar{x} < b$ tale che $f(\bar{x}) = \ell$. Poiché f è monotona crescente $f(x) = \ell$ per ogni $x \in [\bar{x}, b)$ e quindi
$$\lim_{x\to b^-} f(x) = \ell = \sup_{x\in(a,b)} f(x).$$
2. Se $f(x) < \sup_{x\in(a,b)} f(x)$ per ogni $x \in (a, b)$ allora,
   - se $\sup_{x\in(a,b)} f(x) =: \ell < +\infty$, per definizione di estremo superiore, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{x} < b$ tale che $\ell - \varepsilon < f(\bar{x}) < \ell$ e per monotonia
   $$\ell - \varepsilon < f(x) < \ell \qquad \text{per ogni } x \in [\bar{x}, b)$$
   e quindi $\lim_{x\to b^-} f(x) = \ell^-$;
   - se $\sup_{x\in(a,b)} f(x) = +\infty$ allora per ogni k ...

Teorema

Se $\alpha > 0$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^+} x^\alpha = 0 \\ \lim\limits_{x \to x_0} x^\alpha = x_0^\alpha \qquad \text{se } x_0 > 0; \\ \lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty \end{cases}$$

Teorema

Se $\beta > 1$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} \beta^x = 0 \\ \lim\limits_{x \to x_0} \beta^x = \beta^{x_0} \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \beta^x = +\infty \end{cases}$$

Teorema

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} \log x = -\infty \\ \lim\limits_{x\to x_0} \log x = \log x_0, \qquad x_0 > 0 \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \log x = +\infty \end{cases}$$

Teorema. Algebra dei limiti

Siano $f, g : E \to \mathbb{R}$ e x_0 di accumulazione per E. Supponiamo esistano finiti

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell_1, \qquad \lim_{x \to x_0} g(x) = \ell_2.$$

Allora

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \ell_1 + \ell_2;$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) g(x) = \ell_1 \ell_2;$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell_1}{\ell_2} \qquad \text{se } \ell_2 \neq 0.$$

Vedi: Teorema 2.5, pag. 148

Example

$$\lim_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0, \qquad \lim_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0$$

infatti

- $-|x| \leq \sin x \leq |x|$ implica $\lim_{x \to 0} \sin x = 0$;
- $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$ implica $\lim_{x \to 0} \cos x = 1$;
- $\sin x = \sin(x - x_0) \cos x_0 + \cos(x - x_0) \sin x_0 \ldots$

Teorema. Estensioni dell'algebra dei limiti (1)

Siano $f, g : E \to \mathbb{R}$ e x_0 di accumulazione per E.

- se $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ e g è limitata inferiormente allora
$$\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = +\infty;$$
- se $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ e g è limitata superiormente allora
$$\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = -\infty;$$
- ...

Vedi: Teoremi 2.6, 2.7, 2.8, pagg. 149,150

Teorema. Estensioni dell'algebra dei limiti (2)

Siano $f : E \to \mathbb{R}$ e x_0 di accumulazione per E.

- se $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ allora $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0^+$;
- se $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ allora ...
- se $\lim_{x \to x_0} |f(x)| = +\infty$ allora $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$;
- se $f(x) \neq 0$ per $x \neq x_0$ e se $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0^+$ allora $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$;
- ...

Vedi: Teoremi 2.6, 2.7, 2.8, pagg. 149,150

Teorema. Estensioni dell'algebra dei limiti (3)

Siano $f, g : E \to \mathbb{R}$ e x_0 di accumulazione per E.

- se $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell < 0$ allora
$$\lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = -\infty;$$
- ...
- se $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ e se $g(x) \geq k > 0$ allora
$$\lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = +\infty;$$
- ...

Vedi: Teoremi 2.6, 2.7, 2.8, pagg. 149,150

Teorema. Limiti di funzioni composte

Siano $f : E \to \mathbb{R}$ e $g : F \to \mathbb{R}$ tali che la funzione composta

$$g \circ f : E \to \mathbb{R}$$

sia definita. Sia x_0 di accumulazione per E. Se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \quad \text{e} \quad f(x) \neq \ell \text{ per } x \neq x_0$$

$$\lim_{y \to \ell} g(y) = \lambda$$

allora

$$\lim_{x \to x_0} (g \circ f)(x) = \lambda.$$

Vedi: Teorema 2.9, pag.153

Example (Cambio di variabile nel calcolo dei limiti (1))

$$\begin{cases} f(x) := \sin x & f : (0, \pi) \to \mathbb{R} \\ g(y) := \frac{1}{y^2+1} & g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\lim_{x \to \pi/2} \sin x = 1 \qquad \text{e } \sin x \neq 1 \text{ per } x \neq \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{y \to 1} \frac{1}{y^2 + 1} = \frac{1}{2}$$

allora

$$\lim_{x \to \pi/2} \frac{1}{\sin^2 x + 1} = \lim_{y \to 1} \frac{1}{y^2 + 1} = \frac{1}{2}.$$

Example (Cambio di variabile nel calcolo dei limiti (2))

$$\begin{cases} f(x) := \frac{1}{x} & f : (0, +\infty) \to \mathbb{R} \\ g(y) := \log y & g : (0, +\infty) \to \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\lim_{y \to +\infty} \log y = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

allora

$$\lim_{x \to 0^+} (g \circ f)(x) = \lim_{x \to 0^+} \log \left(\frac{1}{x} \right) = \lim_{y \to +\infty} \log y = +\infty.$$

Osservazione

L'ipotesi $f(x) \neq \ell$ per $x \neq x_0$ è necessaria per la validità del teorema.

Example

$$\begin{cases} f(x) := 0 & \text{per } x \in \mathbb{R} \\ g(y) := & \begin{cases} 0 & \text{per } y \neq 0 \\ 1 & \text{per } y = 0 \end{cases} \end{cases}$$

Allora $(g \circ f)(x) = 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e

$$\lim_{x \to 0} (g \circ f)(x) = 1 \neq \lim_{y \to 0} f(y) = 0.$$

Sono situazioni critiche per la validità del *Teorema 2.5*: le forme di indecisione nel calcolo dei limiti, indicate simbolicamente da

$$\infty - \infty, \qquad 0 \cdot \infty, \qquad \frac{0}{0}, \qquad \frac{\infty}{\infty}, \qquad 0^0, \qquad \infty^0, \qquad 1^\infty$$

- Se $m, n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n}{x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_m} = \begin{cases} 0 & \text{se } m > n \\ 1 & \text{se } m = n \\ +\infty & \text{se } m < n \end{cases}$$

- se $a > 1$ e per qualsiasi $m \in \mathbb{N}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^m} = +\infty;$$

- per qualsiasi $\alpha > 0$ e per qualsiasi $k > 0$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{(\log x)^k} = +\infty.$$

- Utilizzando il teorema del confronto (*vedi: esempio 2.11, pag. 147*)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1;$$

- dal limite precedente,

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2} \frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \frac{1}{\cos x} = 1$$

MEMO

Se $n \in \mathbb{N}$,

$$e := \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Teorema

Se $x \in \mathbb{R}$

$$e = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x .$$

Sono corollari del Teorema precedente (*vedi: Proposizione 3.10, pag.174*):

- Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^x = e^\alpha$$

- e, con il cambio di variabile $x \to \frac{1}{x}$, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to 0} (1 + \alpha x)^{1/x} = e^\alpha .$$

Sono anche corollari del Teorema precedente (*vedi: Proposizione 3.10, pag.174*):

- $$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$$
- $$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$
- per $\beta > 0$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\beta^x - 1}{x} = \log \beta.$$

Infine, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^{\alpha} - 1}{x} = \alpha.$$