Funzioni continue

Raul Paolo Serapioni

Analisi Matematica 1
Analisi Matematica A – Primo modulo
Corsi di Laurea in Fisica e Matematica
Università di Trento

ottobre 2019

Funzioni continue e loro proprietà:

Vedi: Cap 5: par 1.1, 1.2, 1.3

Definizione

Sia $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

- f si dice continua in $x_0 \in E$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon, \qquad \text{per ogni } x \in E.$$

  Alternativamente, se x_0 è di accumulazione per E, f è continua in x_0 se

$$f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x).$$

- $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice continua in E se è continua in ogni punto di E.

Vedi: Definizione 1.1, pag 199

Definizione di continuità da destra /sinistra

Sia $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

f è continua da destra in $x_0 \in E$ se

$$f(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} f(x).$$

f è continua da sinistra in $x_0 \in E$ se

$$f(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

Se $f : E \to \mathbb{R}$, $x_0 \in E$ e f non è continua in x_0 allora x_0 si dice punto di discontinuità per f.

Example (Discontinuità eliminabili)

Se $\lim_{x \to x_0} f(x)$ esiste finito ma

$$f(x_0) \neq \lim_{x \to x_0} f(x)$$

diciamo che x_0 è un punto di discontinuità eliminabile.

Example (Discontinuità "di salto")

Se $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ e $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ esistono finiti ma

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x\to x_0^+} f(x)$$

diciamo che x_0 è un punto di discontinuità di salto.

Example (Altre discontinuità)

Comprende tutti gli altri casi. Per esempio

- Se $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \pm\infty$ e/o $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \pm\infty$
- Se non esiste $\lim_{x\to x_0} f(x)$
- ...

Teorema

Siano $f, g : E \to \mathbb{R}$ funzioni continue. Allora le combinazioni lineari

$$\alpha f + \beta g : E \to \mathbb{R}$$

sono continue in E per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

L'insieme

$$\mathcal{C}(E) := \{f : E \to \mathbb{R} : f \text{ è continua in } E\}$$

è uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{R}$.

Teorema

Siano $f, g : E \to \mathbb{R}$ funzioni continue. Allora

- $fg : E \to \mathbb{R}$ è continua in E;
- $\frac{f}{g}$ è continua in $\{x \in E : g(x) \neq 0\}$
- $f^+ := \max\{f, 0\}$ e $f^- := -\min\{f, 0\}$ sono continue;
- $|f|$ è continua;
- $\max\{f, g\}$ e $\min\{f, g\}$ sono continue.

Vedi anche gli esempi a pag 200

Teorema

La funzione composta di due funzioni continue è una funzione continua.

Vedi: Teorema 1.1, pag 201

Teorema

Una funzione monotona definita in un intervallo I può avere al più una infinità numerabile di punti di discontinuità in I e queste sono discontinuità di salto.

Vedi: Teorema 1.2, pag 203

Example (Esistono funzioni sempre discontinue)

La " funzione di Dirichlet "

$$d : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ definita come} \quad d(x) := \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

è discontinua in ogni punto di $\mathbb{R}$.

Teorema "di permanenza del segno"

Siano $E \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in E$, $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione continua in x_0.
Se $f(x_0) > 0$ esiste $\varepsilon > 0$ tale che

$$f(x) > 0 \qquad \text{per ogni } x \in E \text{ tale che } |x - x_0| < \varepsilon.$$

Vedi: Teorema 1.3, pag 204

Teorema "degli zeri"

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $[a, b]$ e tale che $f(a)f(b) < 0$. Allora esiste (almeno) un punto $c \in (a, b)$ tale che $f(c) = 0$.

Vedi: Teorema 1.4, pag 204

Cenno di prova: Supponiamo $f(a) > 0$ e sia

$$P := \{x \in [a, b] : f(x) > 0\}.$$

P è non vuoto, perchè $a \in P$, e limitato, perchè contenuto in $[a, b]$. Quindi esiste $c := \sup P$. Proviamo che $f(c) = 0$.

- Non è possibile che $f(c) > 0$ perchè, per il Teorema di permanenza del segno, f dovrebbe essere positiva anche sulla destra di c e quindi c non sarebbe maggiorante di P.
- non è possibile che $f(c) < 0$ perchè, per il Teorema di permanenza del segno, f sarebbe negativa anche sulla sinistra di c e quindi c non sarebbe il minimo dei maggioranti di P.

Il metodo di bisezione: traccia di una dimostrazione alternativa del teorema degli zeri.

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, f continua e (per esempio)

$$f(a) < 0, \quad f(b) > 0.$$

Si definiscono iterativamente due successioni $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ con la seguente procedura:

1. $a_0 := a, \quad b_0 := b;$
2. per $n \geq 0$
   - se $f\left(\frac{b_n+a_n}{2}\right) < 0$ allora $a_{n+1} := \frac{b_n+a_n}{2}$ e $b_{n+1} := b_n$
   - se $f\left(\frac{b_n+a_n}{2}\right) > 0$ allora $a_{n+1} := a_n$ e $b_{n+1} := \frac{b_n+a_n}{2}$
   - se $f\left(\frac{b_n+a_n}{2}\right) = 0$ la procedura si interrompe perchè il punto di annullamento è stato trovato.

Con questa costruzione

- $a = a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1 \leq b_0 = b$
- $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$
- quindi esistono e sono uguali

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n =: c$$

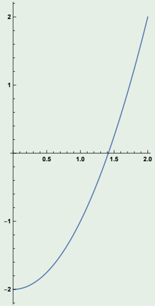
- utilizzando il teorema di permanenza del segno segue che

$$f(c) = 0.$$

$\square$

Example

Applicando il metodo di bisezione alla ricerca del punto di annullamento di $f(x) := x^2 - 2$ sull'intervallo $[0, 2]$ otteniamo una sequenza di intervalli i cui estremi approssimano $\sqrt{2}$.



Example

Applicando il metodo di bisezione alla ricerca del punto di annullamento di $f(x) := x^2 - 2$ sull'intervallo $[0, 2]$ otteniamo una sequenza di intervalli i cui estremi approssimano $\sqrt{2}$.

$$
\begin{array}{ll}
a_0 = 0 & b_0 = 2 \\
a_1 = 1 & b_1 = 2 \\
a_2 = 1 & b_2 = 1,5 \\
a_3 = 1,25 & b_3 = 1,5 \\
a_4 = 1,375 & b_4 = 1,5 \\
a_5 = 1,375 & b_5 = 1,4375 \\
a_6 = 1,40625 & b_6 = 1,4375 \\
a_7 = 1,40625 & b_7 = 1,42188 \\
a_8 = 1,41406 & b_8 = 1,42188 \\
a_9 = 1,41406 & b_9 = 1,41797
\end{array}
$$

Teorema "dei valori intermedi"

Siano $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo e $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua in I.
Se $\lambda \in \mathbb{R}$ è tale che

$$\inf_I f < \lambda < \sup_I f$$

allora esiste (almeno) un $c \in I$ tale che $f(c) = \lambda$.

Vedi: Corollario 1.5, pag 206

Corollario "L'immagine continua di un intervallo è un intervallo"

Siano $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo e $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua in I.
Allora $f(I)$ è un intervallo.